



普通高等教育“十一五”国家级规划教材  
电气工程、自动化专业规划教材

# 现代控制理论 (第2版)

王宏华 主 编  
王时胜 副主编



电子工业出版社  
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

<http://www.phei.com.cn>

普通高等教育“十一五”国家级规划教材  
电气工程、自动化专业规划教材

# 现代控制理论

## (第2版)

王宏华 主编

王时胜 副主编

高 强 李 智 张 燕 安连祥 参编

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 • BEIJING

## 内 容 简 介

本书从工程应用角度出发,以线性系统理论和最优控制为主线,介绍现代控制理论的基本方法。其中,线性系统理论部分主要阐述状态空间分析法和综合法的基本内容,包括动态系统的状态空间描述、动态系统的定量分析(状态方程的解)和定性分析(能控性、能观测性、李亚普诺夫稳定性)、动态系统的综合(状态反馈与状态观测器设计);最优控制部分在介绍解决最优问题3种基本方法(变分法、极小值原理、动态规划法)的基础上,阐述两类典型最优反馈系统的设计(线性二次型最优控制、最小时间控制)。本书在保证理论知识体系结构完整的前提下,融入 MATLAB 在线性系统理论和最优控制中的应用。

本书注重状态空间控制理论的物理概念和工程背景,阐述方式上力求符合理工科学生的认识规律。本书可作为高等院校自动化、电气工程及其自动化等专业本科生的教材,也可供相关专业的研究生及相关领域的工程技术人员学习参考。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究。

## 图书在版编目(CIP)数据

现代控制理论 / 王宏华主编. — 2 版. — 北京:电子工业出版社, 2013.1

电气工程、自动化专业规划教材

ISBN 978-7-121-19449-8

I. ①现… II. ①王… III. ①现代控制理论—高等学校—教材 IV. ①O231

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 012495 号

责任编辑:凌 毅

印 刷:

装 订:

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本:787×1092 1/16 印张:19.25 字数:518 千字

印 次:2013 年 1 月第 1 次印刷

印 数:4000 册 定价:36.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系。联系及邮购电话:(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn,盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线:(010)88258888。

## 第 2 版前言

如何使状态空间控制理论与工程实际问题紧密结合,提高学生灵活、综合应用现代控制理论分析、解决工程实际问题的能力,为其今后从事先进控制理论和技术的研究开发提供支持,是“现代控制理论”教学实践中一直存在的难题。为了适应现代控制理论教学改革需要和 21 世纪对人才培养的要求,本书第 1 版已做了一定的努力和尝试,基本形成了结构清晰,注重物理概念和工程应用背景,融入 MATLAB 应用,例题、习题丰富,利于自学等特色,并受到了读者的肯定。本次再版在保持第 1 版框架体系、主要内容及基本特色的基础上,主要进行了如下修改和补充:

- (1) 在第 3 章增加传递函数矩阵的状态空间实现;
- (2) 在介绍李亚普诺夫稳定性理论前,增加外部稳定性和内部稳定性的比较分析;
- (3) 在第 5 章增加基于状态空间综合法的直流电动机调速控制系统设计举例;
- (4) 充实了一些综合、灵活应用知识的习题;

(5) 改正了第 1 版中存在的疏漏,修改了部分内容的阐述方式,力求符合理工科学生的认识规律,尽量避免烦琐的数学证明,注重应用对偶性质简化证明。

本书第 1 版由王宏华任主编,王时胜任副主编,高强、李智、张燕、安连祥参编。本次再版工作主要由王宏华结合教学实践的经验和体会完成。

王执铨教授担任本书第 1 版的主审,提出了许多宝贵的意见。本书在编写过程中,参阅了国内外专家、学者的教材、著作,本次再版也是在电子工业出版社凌毅编辑的促进与支持下才顺利与读者见面的,谨在此一并致谢。

本书提供配套的电子课件及相关 MATLAB 程序,可登录电子工业出版社的华信教育资源网:[www.hxedu.com.cn](http://www.hxedu.com.cn),注册后免费下载。

对于本版中存在的错误和不妥之处,恳请读者批评指正。

作者的电子邮箱为:[wanghonghua@263.net](mailto:wanghonghua@263.net)。

王宏华

2013 年 1 月

# 第 1 版前言

现代控制理论研究范围较广,线性系统理论、最优控制、系统辨识、最优估计理论、自适应控制均是现代控制理论的重要内容,但受教学学时和教材篇幅的限制,难以做到面面俱到。考虑到线性系统理论是现代控制理论的基础,最优控制是现代控制理论的核心,本书从工程应用角度出发,以线性系统理论和最优控制为主线,介绍现代控制理论的基本方法。其中,线性系统理论部分主要阐述状态空间分析法和综合法的基本内容,包括动态系统的状态空间描述,动态系统的定量分析(状态方程的解)和定性分析(能控性、能观测性、李亚普诺夫稳定性),动态系统的综合(状态反馈与状态观测器设计);最优控制部分在介绍解决最优问题 3 种基本方法(变分法、极小值原理、动态规划法)的基础上,阐述两类典型最优反馈系统的设计(线性二次型最优控制、最小时间控制)。

本书可作为自动化、电气工程及其自动化等专业本科生的教材,也可供相关领域的工程技术人员参考。为了适应控制理论教学改革需要和 21 世纪对人才培养的要求,本书在编写中强调状态空间控制理论与工程实践问题紧密结合,注重学生分析问题和解决问题能力的培养,力求形成如下特色:

(1) 结构清晰,便于学生从整体上掌握现代控制理论的基本方法。本书贯穿了动态系统在状态空间数学模型基础上的定量分析,定性分析,极点配置,最优反馈控制这一结构主线。

(2) 注重物理概念,避免烦琐数学推导,突出现代控制理论的工程应用背景,便于指导学生运用理论解决实际问题。

(3) 在阐述现代控制理论的基本方法时注意与经典控制理论基本方法的联系与比较。

(4) 在保证理论知识体系结构完整的前提下,融入 MATLAB 在线性系统理论和最优控制中的应用。

(5) 有较丰富的例题、习题与思考题、上机实验题,便于学生自学,并有利于学生计算机应用能力和研究能力的提高。

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材,由河海大学王宏华教授担任主编,南昌大学王时胜教授担任副主编。各章节编写分工如下:河海大学王宏华编写绪论、第 2 章、第 5 章;南昌大学王时胜编写第 1 章的 1.1~1.2 节、第 1 章的小结、第 1 章的思考题与习题及上机实验题、第 3 章;天津理工大学高强编写第 1 章的 1.3~1.5 节;武汉工业学院李智编写第 4 章;河北工业大学张燕编写第 6 章的 6.1~6.6 节、第 6 章的小结、第 6 章的思考题与习题及上机实验题;河北工业大学安连祥编写第 6 章的 6.7~6.9 节。全书由河海大学王宏华统稿和修改。

本书由南京理工大学王执铨教授主审。王执铨教授认真审阅了书稿,并提出了许多宝贵的意见。本书在编写过程中,参阅了国内外专家、学者的教材、著作,得到了电子工业出版社和凌毅编辑的支持和帮助,编者谨在此一并致谢。

本书有配套的电子课件,可登录电子工业出版社的华信资源教育网:[www.huaxin.edu.cn](http://www.huaxin.edu.cn)或[www.hxedu.com.cn](http://www.hxedu.com.cn),注册后免费下载。

由于作者的学识和经验有限,书中错误和不妥之处在所难免,恳请读者批评指正。

作 者

2006.8

# 目 录

绪论	1
0.1 自动控制理论的发展与现状	1
0.2 现代控制理论的研究范围	3
0.3 经典控制理论与现代控制理论的联系与比较	4
0.4 MATLAB 控制系统工具箱简介	5
0.5 本书综述	6
第 1 章 动态系统的状态空间描述	7
1.1 引言	7
1.2 动态系统的状态空间模型	7
1.2.1 状态空间的基本概念	7
1.2.2 动态系统状态空间表达式的一般形式	14
1.2.3 状态空间模型的图示	17
1.2.4 由系统机理建立状态空间模型示例	18
1.3 动态系统数学模型变换	23
1.3.1 状态向量的线性变换与状态空间表达式标准型	23
1.3.2 系统的高阶微分方程描述化为状态空间描述	30
1.3.3 系统的传递函数描述化为状态空间描述	36
1.3.4 系统的传递函数阵	46
1.4 离散系统的状态空间描述	51
1.4.1 离散系统的状态空间表达式	51
1.4.2 差分方程化为状态空间表达式	52
1.4.3 由脉冲传递函数化为状态空间表达式	54
1.4.4 由离散系统状态空间表达式求脉冲传递函数矩阵	57
1.5 MATLAB 在系统数学模型变换中的应用	57
1.5.1 系统的模型	57
1.5.2 系统模型的转换	59
1.5.3 系统的线性非奇异变换与标准型状态空间表达式	62
小结	64
思考题与习题 1	64
上机实验题 1	68
第 2 章 线性系统动态分析	70
2.1 引言	70
2.2 线性定常齐次状态方程的解	70
2.3 状态转移矩阵的性质及其计算方法	72
2.3.1 线性定常系统状态转移矩阵的运算性质	72
2.3.2 线性定常系统状态转移矩阵的计算方法	73

2.4	线性定常非齐次状态方程的解 .....	82
2.5	线性时变系统状态方程的解 .....	84
2.5.1	线性时变系统状态转移矩阵的求解 .....	85
2.5.2	线性时变系统状态转移矩阵的性质 .....	87
2.5.3	线性时变非齐次状态方程的解 .....	87
2.6	离散状态方程的解 .....	90
2.6.1	递推法求解线性离散状态方程 .....	90
2.6.2	Z变换法求解线性定常离散状态方程 .....	92
2.7	连续状态方程的离散化 .....	95
2.7.1	线性定常连续状态方程的离散化 .....	96
2.7.2	线性时变连续状态方程的离散化 .....	97
2.8	MATLAB在线性系统动态分析中的应用 .....	101
2.8.1	应用 MATLAB 计算线性定常系统的矩阵指数(状态转移矩阵) .....	101
2.8.2	应用 MATLAB 求定常系统时间响应 .....	103
2.8.3	应用 MATLAB 变连续状态空间模型为离散状态空间模型 .....	108
	小结 .....	109
	思考题与习题 2 .....	110
	上机实验题 2 .....	112
<b>第 3 章</b>	<b>线性系统的能控性和能观测性分析 .....</b>	<b>114</b>
3.1	引言 .....	114
3.2	能控性与能观测性的概念与示例 .....	114
3.3	能控性和能观测性定义 .....	115
3.3.1	能控性定义 .....	115
3.3.2	能观测性定义 .....	116
3.4	线性连续系统能控性判据 .....	118
3.4.1	线性定常连续系统能控性判据 .....	118
3.4.2	线性定常连续系统输出能控性 .....	126
3.4.3	线性时变连续系统能控性判据 .....	127
3.5	线性连续系统能观测性判据 .....	130
3.5.1	线性定常连续系统能观测性判据 .....	130
3.5.2	线性时变连续系统能观测性判据 .....	137
3.6	线性离散系统的能控性与能观测性 .....	138
3.6.1	线性离散系统能控性定义 .....	138
3.6.2	线性定常离散系统能控性的秩判据 .....	138
3.6.3	线性离散系统能观测性定义 .....	140
3.6.4	线性定常离散系统能观测性的秩判据 .....	141
3.6.5	离散化系统能控性、能观测性与采样周期的关系 .....	142
3.7	系统能控性和能观测性的对偶原理 .....	143
3.7.1	线性系统的对偶关系 .....	144
3.7.2	对偶原理 .....	144
3.8	线性系统的结构分解 .....	145

3.8.1	化为约当标准型的分解 .....	145
3.8.2	按能控性和能观测性分解 .....	147
3.9	能控性和能观测性与传递函数(阵)的关系 .....	156
3.10	能控标准型与能观测标准型 .....	159
3.10.1	单输入系统的能控标准型 .....	159
3.10.2	单输出系统的能观测标准型 .....	164
3.11	传递函数矩阵的状态空间实现 .....	167
3.11.1	实现和最小实现概述 .....	167
3.11.2	传递函数矩阵的能控标准型实现和能观测标准型实现 .....	168
3.11.3	传递函数矩阵的最小实现 .....	169
3.12	MATLAB 在能控性和能观测性分析中的应用 .....	173
3.12.1	系统能控、能观测性分析的 MATLAB 函数 .....	173
3.12.2	用 MATLAB 进行系统能控性和能观测性分析举例 .....	174
小结	.....	175
思考题与习题 3	.....	176
上机实验题 3	.....	179
<b>第 4 章 李亚普诺夫稳定性分析</b>	.....	<b>181</b>
4.1	引言 .....	181
4.2	外部稳定性和内部稳定性 .....	182
4.2.1	外部稳定性 .....	182
4.2.2	内部稳定性 .....	182
4.2.3	外部稳定性与内部稳定性的关系 .....	183
4.3	李亚普诺夫稳定性的基本概念 .....	184
4.3.1	平衡状态 .....	184
4.3.2	范数 .....	185
4.3.3	李亚普诺夫稳定性定义 .....	186
4.4	李亚普诺夫稳定性定理 .....	187
4.4.1	二次型函数及其定号性 .....	187
4.4.2	李亚普诺夫第二法 .....	189
4.5	线性定常系统李亚普诺夫稳定性分析 .....	193
4.5.1	李亚普诺夫第一法(间接法) .....	193
4.5.2	李亚普诺夫第二法 .....	193
4.6	线性时变系统李亚普诺夫函数的求法 .....	197
4.6.1	线性时变连续系统 .....	197
4.6.2	线性时变离散系统 .....	198
4.7	非线性系统李亚普诺夫稳定性分析 .....	198
4.7.1	李亚普诺夫第一法分析非线性系统的稳定性 .....	198
4.7.2	李亚普诺夫第二法在非线性系统稳定性分析中的应用 .....	199
4.8	李亚普诺夫直接法应用举例 .....	203
4.9	MATLAB 在系统稳定性分析中的应用 .....	205
4.9.1	李亚普诺夫第一法 .....	205



4.9.2 李亚普诺夫第二法 .....	205
小结 .....	206
思考题与习题 4 .....	206
上机实验题 4 .....	208
<b>第 5 章 状态反馈与状态观测器 .....</b>	<b>209</b>
5.1 引言 .....	209
5.2 状态反馈与输出反馈 .....	209
5.2.1 状态反馈 .....	209
5.2.2 输出反馈 .....	210
5.3 反馈控制对能控性与能观测性的影响 .....	211
5.4 闭环系统极点配置 .....	213
5.4.1 采用状态反馈配置闭环系统极点 .....	214
5.4.2 采用线性非动态输出反馈至参考输入配置闭环系统极点 .....	217
5.4.3 镇定问题 .....	218
5.5 状态观测器 .....	219
5.5.1 全维观测器的构造思想 .....	219
5.5.2 闭环观测器极点配置 .....	221
5.5.3 降维观测器 .....	224
5.6 采用状态观测器的状态反馈系统 .....	229
5.7 解耦控制 .....	233
5.7.1 前馈补偿器解耦 .....	234
5.7.2 输入变换与状态反馈相结合实现解耦控制 .....	234
5.8 MATLAB 在闭环极点配置及状态观测器设计中的应用 .....	236
5.8.1 用 MATLAB 求解闭环极点配置问题 .....	236
5.8.2 用 MATLAB 设计状态观测器 .....	237
5.8.3 基于 SIMULINK 的状态反馈系统仿真研究 .....	237
5.9 线性控制系统理论的工程应用举例 .....	238
5.9.1 稳态精度与跟踪问题 .....	238
5.9.2 基于状态空间综合法的单倒立摆控制系统设计实例 .....	240
5.9.3 基于状态空间综合法的直流电动机调速控制系统设计实例 .....	244
小结 .....	247
思考题与习题 5 .....	248
上机实验题 5 .....	250
<b>第 6 章 最优控制的基本理论及应用 .....</b>	<b>252</b>
6.1 引言 .....	252
6.2 最优控制问题的提出及数学描述 .....	252
6.2.1 最优控制问题实例 .....	252
6.2.2 最优控制问题的数学描述 .....	253
6.3 变分法 .....	255
6.3.1 变分法的基本概念 .....	255
6.3.2 用变分法求解无约束条件的泛函极值问题 .....	257

6.3.3	有约束条件的泛函极值问题 .....	260
6.4	极小值原理 .....	264
6.5	动态规划法 .....	267
6.5.1	最优性原理 .....	267
6.5.2	离散系统的动态规划 .....	269
6.5.3	连续系统的动态规划 .....	270
6.6	线性二次型最优调节器 .....	272
6.6.1	线性二次型最优控制问题的提法 .....	272
6.6.2	有限时间的线性最优调节器 .....	273
6.6.3	定常线性最优调节器 .....	275
6.6.4	输出调节器 .....	278
6.6.5	非零给定点调节器 .....	280
6.6.6	最优跟踪问题 .....	281
6.7	最小时间控制 .....	283
6.8	应用 MATLAB 解线性二次型最优控制问题 .....	287
6.9	最优控制理论的工程应用举例 .....	289
	小结 .....	292
	思考题与习题 6 .....	293
	上机实验题 6 .....	295
	参考文献 .....	297

# 绪 论

## 0.1 自动控制理论的发展与现状

自动控制系统是无须人直接参与而借助控制装置使被控对象的被控量等于给定量或按设定规律自动运行的系统。自动控制理论是基于数学、物理学等基础科学,研究自动控制系统建模、分析、综合共同规律的技术科学。其研究的主要问题是控制过程的精度,即如何分析、协调系统被控量在控制过程中跟踪给定量的“稳”、“快”、“准”这3项相互牵制的性能。

尽管最早的自动控制可追溯到公元前,如我国古代的漏壶指南车、希腊人公元前300年使用的浮子控制器等,但自动控制的大量应用却始于第一次工业革命时期。1788年,瓦特(J. Watt)使用的自动调节进气阀门开度以控制蒸汽机转速的离心式(飞球式)调速器是闭环自动控制装置在工程实践中应用的第一项重大成果。以此为背景,物理学家麦克斯韦(J. C. Maxwell)于1868年在“论调节器”这篇论文中首次对反馈控制系统的稳定性进行系统分析,指出系统稳定性取决于系统微分方程对应的特征方程的根具有负实部,该论文是控制理论早期发展的奠基之作。随后,自动控制理论开始形成并随着控制工程实践的需要不断发展。纵观自动控制理论100多年的发展历程,根据研究方法和思路的不同,一般可分为如下3个阶段。

### 1. 控制理论发展初期及经典控制理论阶段

1868年麦克斯韦从理论上揭示了反馈系统的稳定性与系统微分方程对应的特征方程的特征根在复平面上分布位置的关系;1877年劳斯(E. J. Routh)、1895年赫尔维茨(A. Hurwitz)分别研究了系统的稳定性与特征方程系数的关系,并分别独立给出了高阶线性系统稳定性的代数判据,这就是至今仍得到应用的劳斯判据和赫尔维茨判据。针对非线性和时变系统稳定性问题,1892年,李亚普诺夫(A. M. Lyapunov)提出用可模拟系统能量的假想标量函数——“李亚普诺夫函数”的正定性及其导数的负定性直接判别系统稳定性的判据,建立了动力学系统稳定性的一般理论。

1927年,为了减小电子管放大器的非线性引起的信号失真,布莱克(H. S. Black)提出了反馈放大器,“反馈”这一自动控制的基本原理和基本方法开始建立;但提高反馈系统的开环增益以减小误差(失真)与系统稳定性要求降低开环增益是矛盾的,这就涉及反馈系统的稳定性问题。当动态特征很复杂时,难以用基于时域的劳斯-赫尔维茨判据解决。1932年,奈奎斯特(H. Nyquist)提出负反馈系统稳定性频(率)域判据,标志着经典控制理论的形成,其揭示了系统开环幅相频率特性 $G(j\omega)$ 和闭环系统稳定性的本质联系。1943年,哈尔(A. C. Hall)基于传递函数这一描述系统动态特性的复数域数学模型,将通信工程的频率响应法和机械工程的时域方法统一为经典控制理论的复数域方法。传递函数可通过在零初始条件下对线性常微分方程进行拉普拉斯(Laplace)变换得到,其不仅回避了求解高阶微分方程的困难,而且可直接应用传递函数研究系统结构和参数对性能指标的影响。1945年,伯德(H. W. Bode)出版了《网络分析和反馈放大器设计》一书,提出了使频率响应法更适合工程应用的Bode图法。Bode图绘制简便且有良好的工程分析精度,不仅可分析判断闭环系统动、静态性能,而且可确切获取闭环系统稳定性和稳定裕度的信息。1948年,伊凡思(W. R. Evans)则提出了复数域分析和设计负反馈系统的方

法——根轨迹法,即直接由开环零、极点在复平面的分布求闭环特征根随某一参数变化的轨迹。至此,以传递函数为动态数学模型、频率响应法和根轨迹法两种频域方法为核心,主要研究单输入单输出(SISO)线性定常(LTI)反馈系统的经典控制理论基本成熟。

1944年,美国陆军发明的自动化防空火炮系统是经典控制理论应用于工程实践的成功范例之一。数学家维纳(N. Wiener)从中提炼出“信息”、“系统”、“控制”3个要素,于1948出版了自动化科学的奠基著作《控制论——动物和机器中的控制与通信》。该书与1945年贝塔朗菲的《关于一般系统论》、1948年香农(C. Shannon)的《通信的数学理论》简称为“三论”(控制论、系统论、信息论),共同构筑了自动化与信息科学技术的理论基础。

1922年,米诺斯基(N. Minorsky)提出比例积分微分(PID)控制律,其将负反馈系统偏差的现状(比例P)、历史(积分I)和变化趋势(微分D)线性组合成复合控制量,对被控对象进行控制,兼顾了系统稳、快、准3个方面的要求,应用广泛。1942年,尼柯尔斯(N. B. Nichols)提出PID参数最佳整定法,发展了PID算法。

## 2. 现代控制理论阶段

20世纪60年代,随着电子计算机技术的进步,航空航天技术和综合自动化发展的需要,推动了以状态空间描述为基础、最优控制为核心,主要在时域研究多输入多输出(MIMO)系统的现代控制理论的诞生。

1957年,前苏联成功发射人类历史上第一颗人造地球卫星;1968年,美国“阿波罗”宇宙飞船登上月球,揭开了人类开始征服太空的序幕。航天器控制系统是多输入多输出的系统,而且要求设计某种性能指标下的最优控制系统,用经典控制理论基于传递函数的频域方法难以解决。卡尔曼(R. E. Kalman)、贝尔曼(R. Bellman)和庞特里亚金(L. S. Pontryagin)等倡导从变换后的频域回到时域,用状态空间表达式(一阶微分或差分方程组)建立MIMO线性/非线性、定常/时变系统的动态数学模型,并提出与经典控制理论频域法不同的状态反馈和最优控制方法,即现代控制理论。其包括20世纪50年代贝尔曼提出的寻求最优控制的动态规划法和庞特里亚金提出的极小值原理,20世纪60年代卡尔曼分析系统引入的状态空间分析法及提出的多变量最优控制和最优滤波理论、能控性和能观性概念。1958年,由于控制科学中研究非线性系统大范围稳定性问题的推动,基于状态变量法的李亚普诺夫稳定性理论在控制理论的文献中开始被引用,并掀起了相当持久的李亚普诺夫热。应该指出,数字计算机技术的飞速发展,为多变量复杂系统的时域分析提供了物质基础。事实上,现代控制理论的状态空间方法以计算机作为系统建模、分析、设计、控制的工具。

最优控制依赖确定的数学模型,但环境和被控对象参数不可避免的变化将导致实际系统的模型发生变化。因此,在线辨识系统数学模型,并按当前模型修改最优控制律的自适应控制及系统辨识理论也是现代控制理论的研究范畴。20世纪70年代以来,自适应控制理论进展显著,奥斯特隆姆(K. J. Åström)和朗道(Landau)等为此做出了贡献。1970年,罗森布罗克(H. H. Rosenbroek)等提出多变量频域控制理论,将传统频域方法发展为现代频域方法。为了使控制算法对系统模型的变化具有更强的适应性,产生了预测控制和鲁棒控制等方法。这些新方法都是现代控制理论在控制工程实践需要的推动下向深度和广度发展的成果。

## 3. 大系统理论和智能控制理论阶段

20世纪70年代以来,一方面现代工业综合自动化要求对多个相互关联的子系统组成的大系统进行整体控制;另一方面,控制理论应用领域已从传统的军事、工业扩展到社会经济、能源环境、生物医学等大型系统,因此被控对象难以精确描述,控制任务复杂,使基于数学模型、控制任务要求较单一的现代控制理论面临困难,由此产生了大系统理论和智能控制理论。

“大系统”是规模庞大、结构复杂、变量众多、功能综合、目标多样的过程控制与信息处理相结合的综合自动化系统。正在发展之中的大系统理论是动态的系统工程理论。其综合了现代控制理论、图论、数学规划和决策等方面的成果,采用控制和信息的观点,研究大系统的建模和模型简化、结构方案、稳定性和镇定、总体设计中的分解方法和协调等。

智能控制是针对控制系统(被控对象、环境、目标、任务)的不确定性和复杂性产生的不依赖于或不完全依赖于控制对象的数学模型,以知识、经验为基础,模仿人类智能的非传统控制方法。和空间技术、原子能技术并列为 20 世纪 3 大科技成就的人工智能技术的发展,促进了自动控制理论向智能控制方向发展。1971 年,傅京孙(K. S. Fu)将智能控制(Intelligent Control)概括为自动控制(Automatic Control)和人工智能(Artificial Intelligent)的交集,体现了智能控制系统多元跨学科的基本结构特征。随着智能控制技术研究的深入及其走向工程化、实用化,在二元交集论基础上产生了三元、四元、多元等智能控制结构,智能控制的理论体系正在不断的发展和完善之中。1991 年,奥斯特隆姆(K. J. Åström)提出“模糊逻辑控制、神经网络控制、专家控制是 3 种典型的智能控制方法”,较全面地阐明了智能控制的几个重要分支。除此之外,学习控制(包括迭代学习控制和遗传学习控制)、仿人控制、混沌控制等则是智能控制的新兴研究方向。

应该指出,智能控制并非代替而只是扩展了传统控制,应正确处理智能控制对传统控制继承与发展的关系。事实上,智能控制策略与传统控制策略相结合的复合控制模式及几种智能控制策略相结合的集成智能控制是控制策略的发展方向。

进入 21 世纪,控制理论在面临严峻挑战的同时,也面临着又一个创新发展的良好机遇。

## 0.2 现代控制理论的研究范围

现代控制理论是应用状态空间法对多输入多输出、线性或非线性、定常或时变系统的状态进行分析与综合的理论。其采用状态空间表达式作为系统的动态模型,以能控性、能观测性揭示系统外部特性(输入、输出)与内部特性(状态)之间的关系,采用状态反馈、极点配置的方法对系统进行综合,以实现系统性能指标最优控制。现代控制理论的研究范畴主要有如下几个方面。

### 1. 系统辨识

基于动态系统在状态空间的数学模型进行分析和控制是现代控制理论的特点之一。因此,系统辨识和建模是现代控制理论重要研究范畴之一。当系统较复杂时,解析法建模不再适用,而需采用实验研究的方法即系统辨识方法。在基于试验前知识所提出的被辨识系统模型的类型中,根据对所选择的输入试验信号作用下的被辨识系统输出响应的观测,估计被辨识系统等价数学模型的结构参数和模型参数,并进行模型校验。其中,参数估计是系统辨识中最重要和发展最快的研究领域,已出现很多参数估计的计算方法,如基于脉冲响应的脉冲响应法、相关函数法、局部辨识法;基于最小二乘法的加权最小二乘法、递推最小二乘法、广义最小二乘法等;基于似然函数的极大似然法等。

### 2. 线性系统理论

线性系统理论是现代控制理论中应用最广泛的独立分支,也是现代控制理论的基础。其采用状态空间法对线性动态系统进行定量分析(即确定在不同输入控制作用下系统状态的动态响应)和定性分析(即稳定性、能控性、能观测性分析),并采用状态反馈配置闭环极点的方法控制并改善系统状态的动态响应。因此,线性系统理论主要包括动态系统的状态空间描述、状态方程的求解、能控性、能观测性和稳定性分析、状态反馈及状态观测器设计等内容。

低阶线性定常系统的稳定性分析,既可采用李亚普诺夫稳定性判据的第一法(间接法),即求系统微分方程的解,根据解的性质判断系统稳定性;也可采用李亚普诺夫稳定性判据的第二法(直接法),即不求解系统微分方程,而是构造“李亚普诺夫函数”,并根据该标量函数的正定性和其导数的负定性直接判别系统稳定性。李亚普诺夫直接法提供了判别任何复杂系统稳定性的方法,在高阶线性定常系统、非线性系统、时变系统稳定性分析中有显著优势,应用广泛。因此,尽管基于状态变量法的李亚普诺夫稳定性理论是1892年提出的,但控制系统的李亚普诺夫稳定性分析仍是现代控制理论的组成部分。

在状态空间法的基础上,派生了基于几何方法的线性系统几何理论、基于抽象代数的线性系统代数理论及基于经典频率法的线性系统多变量频域理论等新分支。

### 3. 最优控制

最优控制是现代控制理论的核心。最优控制问题就是在多种约束条件下寻找使系统某个性能指标泛函取极值的控制规律,故其数学本质是求某泛函的条件极值问题,即变分学问题。针对经典变分法只适用于求解无约束或容许控制属于开集的最优控制问题的局限,20世纪50年代,庞特里亚金提出“极小值原理”,发展了经典变分原理,以处理容许控制属于闭集的最优控制问题。与此同时,贝尔曼为解决多级决策问题,提出“动态规划”。“极小值原理”和“动态规划”是研究最优控制问题最重要的两种方法。随着控制理论的发展,最优控制也有很大发展,如分布参数的最优控制、随机最优控制、大系统的最优控制等。

### 4. 最优滤波(最佳估计)

最优控制规律是被控系统内部状态向量的函数,但由于被控系统和测量装置存在随机干扰和测量装置的限制,一般难以精确地测量出系统全部状态的信息。故基于已建立的系统数学模型,从夹杂着随机噪声的系统输入/输出的量测数据中,采用统计方法,针对一定统计规则(如最小方差估计、极大似然估计、最小二乘估计等)求出系统状态的最优估计,即最优滤波是闭环系统最优控制工程实现的前提。基于最小方差准则的维纳滤波和卡尔曼滤波是得到广泛应用的两种最优线性滤波方法。20世纪40年代提出的维纳滤波方法开创了应用统计方法研究随机控制问题的新领域,但其仅是对平稳随机过程最优滤波的方法;20世纪60年代提出的卡尔曼滤波理论克服了维纳滤波理论的局限性,适用于非平稳随机过程,已在通信、控制、导航及其他具有随机信号处理的很多领域得到广泛应用。对非线性系统,由于在理论上难于找到严格的递推滤波公式,目前一般采用非线性滤波线性化的近似方法(如连续型和离散型线性化卡尔曼滤波、推广的卡尔曼滤波)处理非线性滤波问题。

### 5. 自适应控制

系统的不确定性(如被控对象参数未知或工作状况改变和环境变化引起系统参数改变)是对基于数学模型的传统控制的挑战,自适应控制正是为解决环境和被控对象参数有较大变化时系统仍能自动保持在接近某种意义下最优运行状态这一问题提出的。“自适应控制”基于在线辨识系统数学模型,将系统当前性能与最优性能比较,实时调整控制器的结构、参数,即修改最优控制规律,以保证系统适应环境和被控对象参数变化,保持最优性能。模型参考自适应控制系统和自校正控制系统是自适应控制系统的两种基本形式。目前,自适应控制理论仍在迅速发展之中,这反映了现代控制系统向智能化、精确化方向发展的总趋势。

## 0.3 经典控制理论与现代控制理论的联系与比较

经典控制理论与现代控制理论是在自动化学科发展的历史中形成的两种不同的对控制系统

分析、综合的方法。经典控制理论适用于单输入单输出(单变量)线性定常系统;现代控制理论适用于多输入多输出(多变量)、线性或非线性、定常或时变系统。

经典控制理论本质上是(复)频域方法,以表达系统外部输入/输出关系的传递函数为动态数学模型、根轨迹和 Bode 图为主要工具,系统输出对特定输入响应的“稳”、“快”、“准”性能为研究重点,常借助图表分析设计系统。综合方法主要为输出反馈和期望频率特性校正(包括在主反馈回路内部的串联校正、反馈校正,和在主反馈回路以外的前置校正、干扰补偿校正),而校正装置由能实现典型控制规律的调节器(如 PI、PD、PID)构成,所设计的系统能保证输出稳定,且具有满意的“稳”、“快”、“准”性能,但并非某种意义上的最优控制系统。

现代控制理论的状态空间法本质上是时域方法,以揭示系统内部状态与外部输入/输出关系的状态空间表达式为动态数学模型、状态空间法为主要工具、在多种约束条件下寻找使系统某个性能指标泛函取极值的最优控制律为研究重点,借助计算机分析设计系统。综合方法主要为状态反馈、极点配置、各种综合目标的最优化。所设计的系统能运行在接近某种意义下的最优状态。

现代控制理论与经典控制理论虽然在方法和思路显著不同,但这两种理论均基于描述动态系统的数学模型,是有内在联系的。经典控制理论以拉普拉斯变换为主要数学工具,采用传递函数这一描述动力学系统运动的外部模型;现代控制理论的状态空间法以矩阵论为主要数学工具,采用状态空间表达式这一描述动力学系统运动的内部模型,而描述动力学系统运动的微分方程则是联系传递函数和状态空间表达式的桥梁。

## 0.4 MATLAB 控制系统工具箱简介

MATLAB 的全称为 Matrix Laboratory(矩阵实验室),是美国 MathWorks 公司的产品,是一种将复数数组(阵列)作为计算基本处理单位的高级科学分析与计算软件。自 1984 年 MathWorks 公司推出内核采用 C 语言编写的 MATLAB 软件以来,经过多年的发展,MATLAB 已成为融“语言化”的数值和符号双重计算能力、强大的数据图形显示功能、图形化控制仿真程序设计功能(SIMULINK)、全方位帮助系统于一体的交互式软件系统,而且其良好的可扩展性吸引了各个领域的专家学者推出不断扩大的附属不同学科的 MATLAB 工具箱,使之成为国际上最为流行的计算软件。目前,国际上许多新版高校教科书都重视 MATLAB 的应用,将其作为分析、计算、设计、仿真研究的基本工具。

MATLAB 控制系统工具箱(Control System Toolbox)集成了在 MATLAB 环境下对线性定常(LTI)连续或离散系统建模、仿真、分析、设计的工具箱函数。这些函数多数为以 m 作扩展名的 M 文件,其包含经典控制理论与现代控制理论中线性系统分析的大部分内容。例如,创建 LTI 系统动态模型(包括状态空间模型(ss)、传递函数模型(tf)、零极点-增益模型(zpk))函数,模型转换函数,模型降阶函数,系统模型连接函数,时域响应(脉冲响应、阶跃响应等)分析函数,频域分析(Bode 图、Nyquist 图、稳定裕度、Nichols 图线)函数,根轨迹分析函数,稳定性分析(时域稳定性分析、李亚普诺夫稳定性分析等)函数,能观性、能控性分析函数,设计函数(包括极点配置、状态估计、线性二次型最优控制器设计等)等。另外,MATLAB 控制系统工具箱还提供 LTI 系统分析和设计的图形界面环境(GUI),支持 10 种不同类型的系统响应分析的 LTI 观测器(LTI Viewer)和用于 SISO 反馈控制系统补偿器设计的图形设计环境(SISO Design Tool),简化了典型控制系统的分析和设计过程。而且,MATLAB 控制系统工具箱具有可扩展性,用户可自行编写 M 文件创建满足某种特定需要的控制函数。

MATLAB 控制系统工具箱随着 MATLAB 的发展而不断升级。随 MATLAB 6.1 一起发行的为 Control System Toolbox Version 5.1 (R12.1), 其包含的控制工具箱函数清单可在 MATLAB 命令窗口(Command Windows)输入联机帮助指令“help control”获得, 若要进一步查询其中某一具体的 M 函数的功能及调用格式, 仍可使用 help 指令获得在线帮助。另外, 也可通过控制系统工具箱附带的演示软件(Control System Toolbox Demos)学习一些控制工具箱函数的使用。事实上, MATLAB 的全方位帮助系统, 为用户学习、掌握 MATLAB 语言及其工具箱知识提供了很好的向导。

作为最早的 MATLAB 工具箱之一的控制系统工具箱, 主要是运用经典控制理论与现代控制理论研究 LTI 系统的函数集合。随着 MATLAB 版本的不断升级, 附属不同学科的 MATLAB 工具箱不断加入到 MATLAB 系统中, 在 MATLAB 6.1 软件包中集成的与控制有关的工具箱除控制系统工具箱之外, 还有基于模型化图形组态的动态系统交互式仿真集成环境 Simulink、系统辨识工具箱(System Identification Toolbox)、鲁棒控制工具箱(Robust Control Toolbox)、模型预测控制工具箱(Model Predictive Control Toolbox)、模糊逻辑工具箱(Fuzzy Logic Toolbox)、神经网络工具箱(Neural Network Toolbox)、非线性控制设计模块库(Nonlinear Control Design Blockset)等, 所包含的内容几乎涵盖当前控制系统建模、分析、设计的各个方面, MATLAB 已成为控制理论研究及工程应用十分重要的有力工具。

## 0.5 本书综述

现代控制理论研究范畴较广, 线性系统理论、最优控制、系统辨识、最优估计理论、自适应控制均是现代控制理论的重要内容, 但受教学学时和教材篇幅的限制, 难以做到面面俱到。考虑到线性系统理论是现代控制理论的基础, 最优控制是现代控制理论的核心, 本书从工程应用角度出发, 以线性系统理论的时域分析和最优控制为主线, 介绍现代控制理论的基本方法。其中, 线性系统理论部分主要阐述状态空间分析法和综合法的基本内容, 包括动态系统的状态空间描述、动态系统的定量分析(状态方程的解)和定性分析(能控性、能观测性、李亚普诺夫稳定性)、动态系统的综合(状态反馈与状态观测器设计); 最优控制部分在介绍解决最优问题 3 种基本方法(变分法、极小值原理、动态规划法)的基础上, 阐述两类典型最优反馈系统的设计(线性二次型最优控制、最小时间控制)。鉴于 MATLAB 已成为国际控制领域应用广泛的工具软件, 本书在保证理论知识体系结构完整的前提下, 融入了 MATLAB 应用。

为了避免使现代控制理论的概念、方法仅仅停留在数学表达式上, 本书编者作了一些努力, 试图形成如下特色:

(1) 结构清晰, 便于学生从整体上掌握现代控制理论的基本思路和方法。本书贯穿了动态系统在状态空间数学模型基础上的定量分析, 定性分析, 极点配置, 最优反馈控制这一结构主线。

(2) 注重物理概念, 避免烦琐数学推导, 出现代控制理论的工程应用背景, 便于指导学生运用理论解决实际问题。例如, 第 4 章编写了李亚普诺夫直接法应用举例, 第 5 章编写了线性控制系统理论的工程应用举例, 第 6 章编写了最优控制理论的工程应用举例。

(3) 在阐述现代控制理论的基本方法时, 注意与经典控制理论基本方法的联系与比较。

(4) 在保证理论知识体系结构完整的前提下, 融入 MATLAB 在线性系统理论和最优控制中的应用。

(5) 每章均有较丰富的例题、习题与思考题、上机实验题, 便于学生对所讨论的问题有更为深入的理解, 并有利于学生自学能力、计算机应用能力和研究能力的提高。



# 第 1 章 动态系统的状态空间描述

## 1.1 引言

经典控制理论以系统的输入、输出特性为研究依据,对线性定常连续系统,其基本数学模型为线性定常高阶微分方程、传递函数;对线性定常离散系统,其基本数学模型则为线性定常高阶差分方程、脉冲传递函数。这些模型仅仅描述系统输入、输出之间的外部特性,不能揭示系统内部各物理量的运动规律;若要完全揭示整个系统的全部运动状况,仅凭输入、输出描述是不够的,即系统的输入、输出描述是一种不完全的描述。

20 世纪 60 年代,人们将状态空间的概念引入控制理论,产生了以状态空间描述为基础、最优控制为核心的现代控制理论。系统动态特性的状态空间描述由两个数学方程组成,一个是反映系统内部状态变量和输入变量间因果关系的状态方程;另一个是表征系统内部状态变量及输入变量与输出变量转换关系的输出方程。系统的状态空间描述不仅描述了系统输入、输出外部特性,而且揭示了系统内部的结构特性,能完全表征系统的所有动力学行为,因而是对系统的一种完全的描述。

经典控制理论主要处理单输入单输出线性定常系统的问题,而状态空间法是一种既可用于单输入、单输出线性定常系统,又可用于非线性系统、时变系统、多输入、多输出系统的有效分析和综合方法。状态空间法可方便地使用向量、矩阵等数学工具,简化系统的数学描述。从设计计算的角度看,由于状态空间法是时域的方法,便于应用数字计算机计算求解,这也是状态空间法的优点之一。

建立动态系统的状态空间模型是状态空间分析和综合的基本问题和前提。

## 1.2 动态系统的状态空间模型

### 1.2.1 状态空间的基本概念

系统的状态空间模型是建立在状态、状态空间概念的基础之上的。为此,首先对系统、状态、状态空间等基本概念进行定义和讨论。

#### 1. 系统的基本概念

##### (1) 系统

所谓系统,是由相互制约的各个部分有机结合,且具有一定功能的整体。从输入、输出关系看,自然界存在两类系统:静态系统和动态系统。

##### (2) 静态系统

对于任意时刻  $t$ , 系统的输出唯一地取决于同一时刻的输入,这类系统称为静态系统。该类系统的特征是:任意时刻系统的输出与同一时刻的输入保持确定的关系,而对该时刻以前的输入无任何依赖性,即无记忆,故静态系统亦称为无记忆系统。静态系统的输入、输出关系为代数方程。

图 1-1 所示的电阻电路就属于静态系统。若输入电压为  $u(t)$ , 对于任意时刻  $t$ , 其输出电流

$i(t)$ 为

$$i(t) = \frac{u(t)}{R} \quad (1-1)$$

显然,  $t$  时刻的输出  $i(t)$  仅与  $t$  时刻的输入  $u(t)$  有关, 而与  $t$  时刻以前的输入  $u(t)$  无关。

### (3) 动态系统

对任意时刻  $t$ , 系统的输出不仅与  $t$  时刻的输入有关, 而且与  $t$  时刻以前的累积有关(这种累积在  $t_0$  ( $t_0 < t$ ) 时刻以初值体现出来), 这类系统称为动态系统。由于  $t_0$  时刻的初值含有过去运动的累积, 故动态系统亦称为有记忆系统。动态系统的输入、输出关系为微分方程。

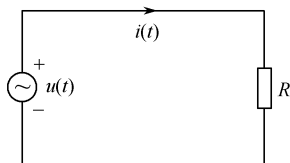


图 1-1 电阻电路

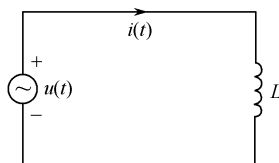


图 1-2 电感电路

考察图 1-2 所示的电感电路, 设电感电流  $i(t)$  为输出, 电压  $u(t)$  为输入, 其输入、输出关系为

$$i(t) = i(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{u(\tau)}{L} d\tau \quad (1-2)$$

式中,  $i(t_0)$  是初始时刻  $t_0$  电感中流过的电流。

由式(1-2)可见, 对含有电感这种储能元件的系统来说,  $t$  时刻的电感电流  $i(t)$  不仅与时间区间( $t_0 \sim t$ )内的输入  $u(t)$  有关, 且与  $t_0$  时刻电感的初始电流有关, 这种系统称为动态系统。

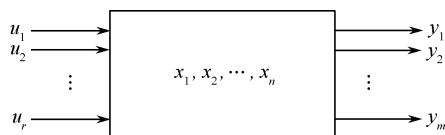


图 1-3 动态系统方框图及其变量

## 2. 动态系统的两类数学描述

一个动态系统可用图 1-3 所示方框图表示。方框以外的部分称为系统环境, 环境对系统的作用称为系统输入, 系统对环境的作用称为系统输出, 输入变量组用  $u_1, u_2, \dots, u_r$  表示, 输出变量组用  $y_1, y_2, \dots, y_m$  表示, 它们均为系统的外部变量。

描述系统内部每个时刻运动状况的变量称为内部变量。若内部变量完全地表征了系统内部的运动状态, 则称为状态变量, 状态变量组用  $x_1, x_2, \dots, x_n$  表示。输入变量、状态变量、输出变量统称为系统变量。

系统动态过程的数学描述实质上就是系统变量间因果关系的一个数学描述式。通常, 可将系统的数学描述分为“外部描述”和“内部描述”两种基本类型。

### (1) 外部描述

外部描述通常称为输入、输出描述。这种描述将系统的输出取为系统外部输入的直接响应, 回避了表征系统内部的动态过程, 即把系统当成一个“黑匣”, 认为系统的内部结构和内部信息全然不知, 系统描述直接反映了输出变量与输入变量间的动态因果关系。

考察图 1-4 所示的  $n$  级 RC 网络, 图中虚线框内为具有放大器隔离的  $n$  级 RC 电路, 系统只有一个输入  $u$ , 一个输出  $y$ , 并设放大器的输入阻抗为无穷大, 输出阻抗为零, 放大倍数为 1。如同经典控制理论中所熟知的, 系统以输入  $u$ 、输出  $y$  作为变量的外部描述为式(1-3)所示的高阶线性常系数微分方程, 即

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y^{(1)} + a_n y = bu \quad (1-3)$$

式中,  $y^{(i)} = d^i y / dt^i$ ;  $a_i$  和  $b$  为实常数,  $i = 1, 2, \dots, n$ 。

在已知输入  $u$  的情况下,解方程式(1-3),可求出输出响应  $y$ ,但不能获悉系统内部电容上电压随时间变化的动态过程。

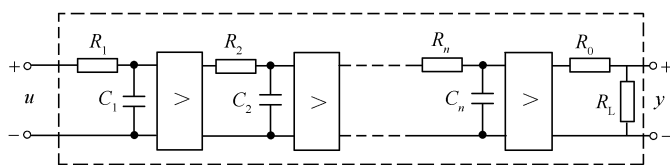


图 1-4  $n$  级 RC 网络

## (2) 内部描述

状态空间描述是内部描述的基本形式,这种描述是基于系统内部结构分析的一类数学模型。其由两个数学方程组成:一个是反映系统内部状态变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  和输入变量  $u_1, u_2, \dots, u_r$  间因果关系的数学表达式,称为状态方程。其数学表达式的形式对于连续时间系统为一阶微分方程组,对于离散时间系统为一阶差分方程组;另一个是表征系统内部状态变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  及输入变量  $u_1, u_2, \dots, u_r$  与输出变量  $y_1, y_2, \dots, y_m$  转换关系的数学表达式,称为输出方程,其数学表达式的形式为代数方程。重新考察图 1-4 所示的网络,利用电路知识容易得到如下—阶微分方程组

$$\begin{cases} \frac{du_{C1}}{dt} = -\frac{1}{R_1 C_1} u_{C1} + \frac{1}{R_1 C_1} u \\ \frac{du_{C2}}{dt} = -\frac{1}{R_2 C_2} u_{C2} + \frac{1}{R_2 C_2} u_{C1} \\ \vdots \\ \frac{du_{Cn}}{dt} = -\frac{1}{R_n C_n} u_{Cn} + \frac{1}{R_n C_n} u_{C(n-1)} \end{cases} \quad (1-4)$$

及

$$y = \frac{R_L}{R_L + R_0} u_{Cn} \quad (1-5)$$

在已知输入  $u$  的情况下,解方程式(1-4)、式(1-5),不仅可求出输出响应  $y$ ,而且能获悉系统内部电容上电压随时间变化的动态过程信息。因此,式(1-4)、式(1-5)是图 1-4 的一种完全描述。

在本书第 3 章将会看到,外部描述仅描述系统的外部特性,不能反映系统内部的某些特性,具有两个完全不同内部结构的系统也可能具有相同的外部特性,因而外部描述通常只是对系统的一种不完整的描述。内部描述由于揭示了系统内部的结构特性,因而是对系统的一种完整的描述,它能完全表征系统的所有动力学特征。

## 3. 系统状态空间描述的基本概念

### (1) 动态系统的状态

动态系统的状态是完全地描述动态系统运动状况的信息,系统在某一时刻的运动状况可以用该时刻系统运动的一组信息表征,定义系统运动信息的集合为状态。

### (2) 状态变量

定义完全表征动态系统时间域运动行为的信息组中的元素为状态变量。状态变量组常用符号  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  表示,且它们相互独立(即变量的数目最小)。

上述状态变量定义中,完全表征的含义为:只要给定初始时刻  $t_0$  的任意初始状态变量组  $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$  和  $t > t_0$  时的输入变量组  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$ , 那么系统的任何一个内部变量在  $t > t_0$  的各时刻的运动行为也就随之完全确定了。而状态变量组  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  为数目最小的含义为:从物理角度上说,减少其中任意一个变量就会减少确定系统运动行为的信息量从而不能完全表征系统运动行为,而增加一个变量对完全表征系统运动行为又是多余的;从数学角度看,这组状态变量是系统所有内部变量中线性无关的一个极大变量组,即  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  以外的系统内部变量均与其线性相关。

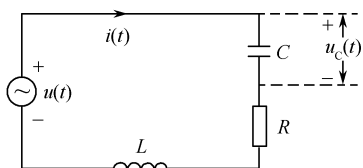


图 1-5 RLC 电路

**【例 1-1】** 确定图 1-5 所示 RLC 电路的状态变量。

**解** 由电路定律,以  $u(t)$  为输入,  $u_C(t)$  为输出的输入、输出描述为

$$LC \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = u(t)$$

$$\text{式中, } u_C = \frac{1}{C} \int i(t) dt。$$

若用状态变量描述,按状态变量的定义,要唯一地确定  $t$  时刻电路的运动行为,除了要知道输入电压  $u(t)$  外,还必须给出流过电感上的初始电流  $i(t_0)$  和电容上的初始电压  $u_C(t_0)$ ,或者说  $u_C(t)$  和  $i(t)$  这两个变量可用来完全地描述该电路的运动行为,且它们之间是独立的,故  $u_C(t)$  和  $i(t)$  是该电路的状态变量。显然,如果仅用  $i(t)$  一个变量去描述,则不能得知  $u_C(t)$  的运动行为;若仅用  $u_C(t)$  去描述,则不能得知  $i(t)$  的运动行为,故减少状态变量组  $u_C(t), i(t)$  中任意一个变量,就会破坏对系统运动行为表征的完整性。若用  $i(t), u_C(t)$  和电容上的电荷  $q(t)$  这 3 个变量去描述,则因为  $Cu_C(t) = q(t)$ ,  $u_C(t)$  与  $q(t)$  线性相关,得知  $u_C(t)$  的运动行为就知道  $q(t)$  的运动行为,故增加  $q(t)$  这个变量是完全表征系统运动行为所不需要的。

### (3) 状态向量

设  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  是系统的一组状态变量,将这些状态变量视为向量  $\mathbf{x}(t)$  的分量,则  $\mathbf{x}(t)$  就称为状态向量,记为

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

### (4) 状态空间

以  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为坐标轴构成的一个  $n$  维欧氏空间,称为状态空间。状态空间的概念由向量空间的概念引出。在向量空间中,维数就是构成向量空间基底的变量个数,在状态空间中,维数的概念与此相同,只不过状态空间基底的变量是系统的状态变量。

### (5) 状态轨迹

状态向量的端点在状态空间中的位置代表了某一特定时刻系统的状态。如果给定  $t_0$  时刻系统的初始状态  $\mathbf{x}(t_0)$ , 则状态向量的初始位置就确定了。系统的状态是时间  $t$  的函数。在不同时刻,系统状态不同,则随着  $t$  的变化,状态向量  $\mathbf{x}(t)$  的端点不断移动,其移动的路径就称为系统的状态轨迹。某二阶系统的状态轨迹如图 1-6 所示。

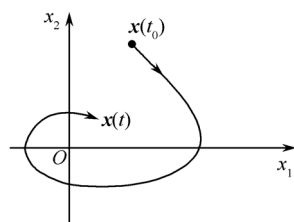


图 1-6 状态轨迹

### (6) 状态方程

描述系统状态变量间或状态变量与系统输入变量间关系的一个一阶微分方程组(连续系统)或一阶差分方程组(离散系统),称为状态方程。

【例 1-2】 建立图 1-5 所示 RLC 电路的状态方程。

解 由例 1-1 知,用电容上的电压  $u_c(t)$  和电感中的电流  $i(t)$  可完全描述系统的运动行为。故取  $u_c(t)$  和  $i(t)$  作为状态变量,根据电路原理有

$$\begin{cases} C \frac{du_c(t)}{dt} = i(t) \\ L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + u_c(t) = u(t) \end{cases} \quad (1-6)$$

将式(1-6)中状态变量的一阶导数放在方程左边,其余项移至方程右边,整理得一阶微分方程组为

$$\begin{cases} \frac{du_c(t)}{dt} = \frac{1}{C}i(t) \\ \frac{di(t)}{dt} = -\frac{1}{L}u_c(t) - \frac{R}{L}i(t) + \frac{1}{L}u(t) \end{cases} \quad (1-7)$$

式(1-7)即为图 1-5 所示 RLC 电路的状态方程,并将其写成向量-矩阵形式,即

$$\begin{bmatrix} \frac{du_c(t)}{dt} \\ \frac{di(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c(t) \\ i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u(t) \quad (1-8)$$

令  $x_1 = u_c(t)$ ,  $x_2 = i(t)$ , 记  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ,  $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$ , 式(1-8)可简写为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (1-9)$$

式中,  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}$ 。

(7) 输出方程

在指定系统输出的情况下,该输出与状态变量及输入变量间的函数关系式称为系统的输出方程。

例 1-2 中,若指定  $u_c(t)$  为输出,且输出一般用  $y(t)$  表示,则输出方程为

$$y(t) = u_c(t) = x_1 \quad (1-10)$$

将式(1-10)写成向量-矩阵形式,得

$$y(t) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} u_c(t) \\ i(t) \end{bmatrix}$$

或

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (1-11)$$

式(1-11)可简写成

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (1-12)$$

式中,  $\mathbf{C} = [1 \quad 0]$ 。

(8) 状态空间表达式

状态方程和输出方程合起来构成对一个动态系统完整的描述,称为动态系统的状态空间表达式。图 1-5 所示电路,若  $u_c(t)$  为输出,取  $x_1 = u_c(t)$ ,  $x_2 = i(t)$  作为状态变量,则其状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1-13)$$

为正确理解状态空间的基本概念,应注意如下几点。

① 系统输出和系统状态在概念上的不同性。输出是人们希望从系统中得到的响应,而状态是完全地描述系统运动行为的一组信息。在线性系统中,输出是状态变量组中的某一个或某几个变量的线性组合。另外,输出总是可以测量的,而状态变量信息并不一定都能测量到。

② 状态变量的非唯一性。对一个动态系统,状态变量组  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  的选取一般具有非唯一性。导致非唯一性的原因在于:系统内部变量的个数必大于状态的维数  $n$ ,而任意  $n$  个线性无关的内部变量都可能取为系统的状态变量。对此以图 1-5 所示 RLC 电路为例加以说明。

由式(1-13),取  $x_1 = u_C(t), x_2 = i(t)$  作为状态变量的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u \quad (1-14)$$

事实上,电容的端电压取决于电容储存的电荷  $q(t)$ ,有  $q(t) = Cu_C(t)$ ,所以亦可取  $q(t), i(t)$  作为状态变量,导出一阶微分方程组为

$$\begin{aligned} \frac{dq(t)}{dt} &= i(t) \\ \frac{di(t)}{dt} &= -\frac{1}{LC} q(t) - \frac{R}{L} i(t) + \frac{1}{L} u(t) \end{aligned} \quad (1-15)$$

令  $\bar{x}_1 = q(t), \bar{x}_2 = i(t)$ ,则有向量-矩阵形式的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u \quad (1-16)$$

若选状态变量  $\hat{x}_1 = \frac{1}{C} \int i dt + Ri, \hat{x}_2 = \frac{1}{C} \int i dt$ ,则有

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= \hat{x}_2 + Ri \\ L \frac{di}{dt} &= -\hat{x}_1 + u \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_2 &= \frac{1}{C} i = \frac{1}{RC} (\hat{x}_1 - \hat{x}_2) \\ \dot{\hat{x}}_1 &= \dot{\hat{x}}_2 + R \frac{di}{dt} = \frac{1}{RC} (\hat{x}_1 - \hat{x}_2) + \frac{R}{L} (-\hat{x}_1 + u) \end{aligned}$$

将以上一阶微分方程组表示的状态方程写成向量-矩阵形式,得

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} - \frac{R}{L} & -\frac{1}{RC} \\ \frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (1-17)$$

由此可见,在同一个系统中,究竟选取哪些变量作为状态变量并不是唯一的,要依所研究的问题

而定,重要的是所选的变量确实有资格作为状态变量。选择状态变量的这种自由性正是状态空间法的优点之一。

③ 任意两组状态变量之间的关系。对于一个动态系统,任意选取两组状态变量  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  和  $\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t), \dots, \bar{x}_n(t)$ , 由于状态变量的线性无关性,由线性代数可知,  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  可表示为  $\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t), \dots, \bar{x}_n(t)$  的线性组合,即

$$\begin{aligned} x_1 &= T_{11}\bar{x}_1 + T_{12}\bar{x}_2 + \dots + T_{1n}\bar{x}_n \\ &\vdots \\ x_n &= T_{n1}\bar{x}_1 + T_{n2}\bar{x}_2 + \dots + T_{nm}\bar{x}_n \end{aligned} \quad (1-18)$$

将式(1-18)写成向量-矩阵方程形式为

$$\mathbf{x} = \mathbf{T} \bar{\mathbf{x}} \quad (1-19)$$

式中,  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ;  $\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix}$ ;  $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & \dots & T_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n1} & \dots & T_{nm} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{T}$  称为变换矩阵。

同理,可将  $\bar{x}_i (i=1, 2, \dots, n)$  表示为  $x_i (i=1, 2, \dots, n)$  的线性组合,得对应的向量-矩阵方程为

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (1-20)$$

式中,  $\mathbf{P}$  亦称为变换矩阵。

由式(1-19) 及式(1-20)得

$$\mathbf{x} = \mathbf{T} \mathbf{P} \mathbf{x}$$

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P} \mathbf{T} \bar{\mathbf{x}}$$

即

$$\mathbf{T} \mathbf{P} = \mathbf{P} \mathbf{T} = \mathbf{I}$$

表明变换矩阵  $\mathbf{T}$  和  $\mathbf{P}$  互为逆,即同一系统所任意选取的两个状态向量  $\mathbf{x}$  和  $\bar{\mathbf{x}}$  之间为线性非奇异变换关系。

④ 线性非奇异变换下,系统任意两个状态空间表达式的关系。系统的状态空间表达式不具有唯一性,选取不同的状态变量,便会有不同的状态空间表达式,但它们均描绘同一系统。对于一个动态系统,一组状态变量下的状态空间表达式可用另一组状态变量下的状态空间表达式经线性非奇异变换得到。

仍以图 1-5 所示 RLC 电路为例,如前所述,若选  $x_1 = u_C(t), x_2 = i(t)$  为状态变量,  $y = u_C(t)$  为输出变量,其状态空间表达式如式(1-13)所示。若选  $\bar{x}_1 = q(t), \bar{x}_2 = i(t)$  为状态变量,  $y = u_C(t)$  作为输出变量,由  $y = u_C(t) = q(t)/C$  且据式(1-16)有状态空间表达式

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1-21)$$

事实上,状态向量  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T$  和  $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{x}_1 \ \bar{x}_2]^T$  之间存在线性非奇异变换关系,即

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} \quad (1-22)$$

式中,  $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  为非奇异变换阵,则  $\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  为  $\mathbf{T}$  的逆矩阵。

将非奇异变换关系式(1-22)代入式(1-13),即可推出状态向量 $\bar{x}$ 下的状态空间表达式(1-21),即

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \mathbf{T} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0] \mathbf{T} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

#### (9) 工程问题中状态变量的选取

① 动态系统需用微分方程描述是因为动态系统含有储能元件,因而,动态系统是一个能存储输入信息的系统。 $t_0$ 时刻以前的输入信息产生 $t_0$ 时刻储能元件上的初始能量,根据储能元件的能量方程,相应的物理变量的初值亦确定。根据状态变量的含义,如果知道 $t=t_0$ 时刻状态变量的值,只要给出 $t>t_0$ 以后的输入,对于确定系统未来的运动状态就是充分的。对同一系统的任何一种不同的状态空间表达式而言,其状态变量的数目是唯一的,必等于系统的阶数,即系统中独立储能元件的个数。因此,在具体工程问题中,可选取独立储能元件的能量方程中的物理变量作为系统的状态变量。

② 状态变量不一定是物理可测量的,有时仅有数学意义而无任何物理意义。在具体工程问题中,为了实现状态的反馈控制,以选择容易测量的量作为状态变量为宜。例如,选择机械系统中的线(角)位移和线(角)速度作为状态变量,电路中电容上的电压和流经电感的电流作为状态变量。

③ 用 $n$ 阶微分方程描述的系统,当 $n$ 个初始条件 $x(t_0), \dot{x}(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0)$ 及 $t \geq t_0$ 的输入 $u(t)$ 给定时,可唯一确定微分方程的解,即系统将来的状态。故 $x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)$ 这 $n$ 个独立的变量可选做状态变量。

### 1.2.2 动态系统状态空间表达式的一般形式

#### 1. 单输入单输出线性定常连续系统

设单输入单输出线性定常 $n$ 阶连续系统, $n$ 个状态变量为 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,其状态方程的一般形式为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1u \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_2u \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_nu \end{aligned} \quad (1-23)$$

输出方程的一般形式为

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + Du \quad (1-24)$$

则其向量-矩阵方程形式的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u \\ y = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + Du \end{cases} \quad (1-25)$$



式(1-25)简记为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y = \mathbf{C}\mathbf{x} + Du \end{cases} \quad (1-26)$$

式中,  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T$  为  $n$  维状态向量, 上标  $T$  为转置符号;  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$  是  $n \times n$  维方阵, 反映了系统内部状态变量间的联系, 称为系统矩阵或状态矩阵;  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$  是  $n \times 1$

维矩阵, 反映了输入对状态变量的作用, 称为输入矩阵或控制矩阵;  $\mathbf{C} = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_n]$  是  $1 \times n$  维矩阵, 反映了输出与状态的组合关系, 称为输出矩阵或观测矩阵;  $D$  是标量, 反映输出与输入的直接关联。

## 2. 多输入多输出线性定常连续系统

对于有  $r$  个输入  $u_1, u_2, \dots, u_r$ ,  $m$  个输出  $y_1, y_2, \dots, y_m$  的多输入多输出  $n$  阶线性定常连续系统, 状态方程的一般形式为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \cdots + b_{1r}u_r \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \cdots + b_{2r}u_r \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \cdots + b_{nr}u_r \end{aligned} \quad (1-27)$$

输出方程的一般形式为

$$\begin{aligned} y_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n + d_{11}u_1 + d_{12}u_2 + \cdots + d_{1r}u_r \\ y_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n + d_{21}u_1 + d_{22}u_2 + \cdots + d_{2r}u_r \\ &\vdots \\ y_m &= c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \cdots + c_{mn}x_n + d_{m1}u_1 + d_{m2}u_2 + \cdots + d_{mr}u_r \end{aligned} \quad (1-28)$$

则其向量-矩阵方程形式的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1-29)$$

式(1-29)简记为  $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ , 即

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u \end{cases} \quad (1-30)$$

式中,  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T$  是  $n$  维状态向量;  $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_m]^T$  是  $m$  维输出向量;  $\mathbf{u} =$

$[u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_r]^T$  是  $r$  维输入向量;  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$  是  $n \times n$  维系统矩阵(或状态矩

阵);  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix}$  是  $n \times r$  维输入矩阵(或控制矩阵);  $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$  是  $m \times n$

维输出矩阵;  $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix}$  是  $m \times r$  维输入/输出关联矩阵(或直接传递矩阵)。应该

指出,在工程上,系统输入对系统输出直接作用的情况是不多见的,即大多数情况下  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ 。

由此可见,采用向量-矩阵方程形式使复杂的多输入多输出系统的数学表达式得以简化,当系统状态变量的数目、输入变量的数目或输出变量的数目增加时,并不增加方程的复杂性。

### 3. 多输入多输出线性时变连续系统

式(1-30)为多输入多输出线性定常连续系统的状态空间表达式,其特征是系数矩阵的各元素均为常数。若  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{D}$  矩阵中的某些元素或全部元素是时间  $t$  的函数,对应的系统称为线性时变连续系统,其向量-矩阵方程形式的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u} \end{cases} \quad (1-31)$$

$$\text{式中, } \mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}; \mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) & \cdots & b_{1r}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) & \cdots & b_{2r}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}(t) & b_{n2}(t) & \cdots & b_{nr}(t) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}(t) = \begin{bmatrix} c_{11}(t) & c_{12}(t) & \cdots & c_{1n}(t) \\ c_{21}(t) & c_{22}(t) & \cdots & c_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1}(t) & c_{m2}(t) & \cdots & c_{mn}(t) \end{bmatrix}; \mathbf{D}(t) = \begin{bmatrix} d_{11}(t) & d_{12}(t) & \cdots & d_{1r}(t) \\ d_{21}(t) & d_{22}(t) & \cdots & d_{2r}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1}(t) & d_{m2}(t) & \cdots & d_{mr}(t) \end{bmatrix}。$$

### 4. 非线性系统

一般来说,实际物理系统都是非线性的。用状态空间表达式描述非线性系统的动态特性,其状态方程是一组一阶非线性微分方程,输出方程是一组非线性代数方程,即

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots, u_r, t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots, u_r, t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots, u_r, t) \end{cases} \quad (1-32)$$

$$\begin{cases} y_1 = g_1(x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots, u_r, t) \\ y_2 = g_2(x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots, u_r, t) \\ \vdots \\ y_m = g_m(x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots, u_r, t) \end{cases} \quad (1-33)$$

用向量-矩阵表示,则为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \mathbf{y} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{cases} \quad (1-34)$$

式中,  $\mathbf{F}, \mathbf{G}$  均为向量函数;  $f_i (i=1, 2, \dots, n), g_j (j=1, 2, \dots, m)$  分别为  $\mathbf{F}, \mathbf{G}$  的元素,  $f_i (i=1, 2, \dots, n), g_j (j=1, 2, \dots, m)$  均是  $x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r$  的某类非线性函数。

由于式(1-32)、式(1-33)或式(1-34)中显含时间  $t$ , 其所描述的系统为非线性时变系统。若式(1-32)、式(1-33)或式(1-34)中不显含时间  $t$ , 则为非线性定常系统, 其状态空间表达式的一般形式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{cases} \quad (1-35)$$

### 1.2.3 状态空间模型的图示

#### 1. 方块图

线性系统状态空间表达式可用方块图来表示。式(1-30)所描述的系统方块图如图 1-7 所示。它形象地表明了系统输入与输出的因果关系, 状态与输入、输出的组合关系。每一方块的输入、输出关系规定为

$$\text{输出向量} = (\text{方块所示矩阵}) \times (\text{输入向量})$$

图 1-7 中, 矩阵  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$  用  $\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t), \mathbf{D}(t)$  替代, 即为式(1-31)所描述的线性时变系统的方块图。

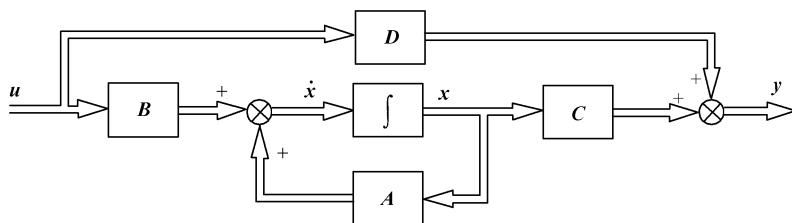


图 1-7 线性定常系统方块图

#### 2. 状态模拟图

在状态空间分析法中, 常采用模拟计算机仿真中的模拟结构图来表示系统的状态空间表达式。绘制这种图形常用到 3 类元件: 积分器、加法器、比例器。绘制步骤是: 积分器的数目应等于状态变量数, 将积分器画在适当位置(积分器用内含积分符号的方框表示), 各积分器的输出表示相应的某个状态变量; 然后根据状态方程和输出方程所表达的运算关系, 画出对应的加法器和比例器(加法器用符号  $\otimes$  表示, 比例器用内含比例系数的方框表示); 最后用带箭头的传输线将各元件连接起来。由于图中采用符号来表示实际的积分器、加法器、比例器, 而积分器的输出表示的是某个状态变量, 故又称这种状态空间表达式的模拟结构图为状态模拟图(或状态变量图)。

【例 1-3】 3 阶系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -3x_1 - 2x_2 - x_3 + u \\ y = 2x_2 + x_1 \end{cases}$$

试画出其模拟结构图(状态变量图)。

**解** 该系统有 3 个状态变量,对应 3 个积分器的输出,而每个积分器的输入量就是对应状态变量的导数。该系统的状态变量图如图 1-8 所示。

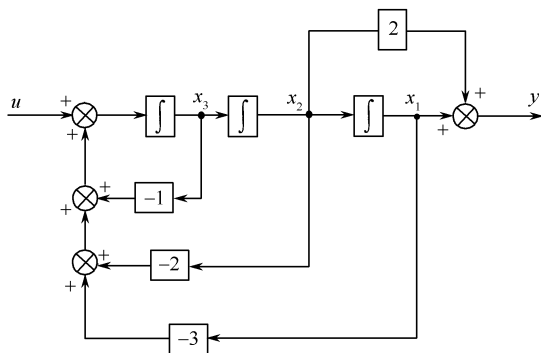


图 1-8 例 1-3 系统的状态变量图

### 1.2.4 由系统机理建立状态空间模型示例

动态系统均含有储能元件,能量的变化伴随有系统的运动变化。因此,可根据支配系统运动的物理定律,建立动态系统的状态方程,在指定系统的输出后即可列写系统的输出方程。

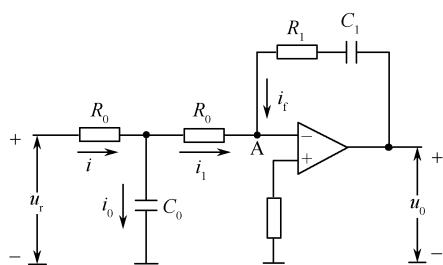


图 1-9 调节器电路图

**【例 1-4】** 图 1-9 所示为带有输入滤波器的有源比例、积分(PI)调节器电路图, $u_r$  为调节器的输入, $u_0$  为调节器的输出,建立其状态空间表达式。

**解** (1) 选择状态变量

该调节器含有两个独立的储能元件  $C_0, C_1$ , 可选电容  $C_0, C_1$  上的电压  $u_{C0}, u_{C1}$  作为状态变量,电压和电流为关联参考方向。

(2) 利用电路基本理论,建立原始方程

考虑到有源放大器的开环增益很大,A 点为虚地点。对于 A 点左边回路,有

$$i = i_0 + i_1 \quad (1-36)$$

$$i_0 = C_0 \frac{du_{C0}}{dt} \quad (1-37)$$

$$i_1 = \frac{u_{C0}}{R_0} \quad (1-38)$$

$$u_{C0} + iR_0 = u_r \quad (1-39)$$

将式(1-36)、式(1-37)、式(1-38)代入式(1-39)并整理,得

$$R_0 C_0 \frac{du_{C0}}{dt} + 2u_{C0} = u_r \quad (1-40)$$

对于 A 点右边回路,有

$$i_f = C_1 \frac{du_{C1}}{dt} = -i_1 = -\frac{u_{C0}}{R_0} \quad (1-41)$$

(3) 导出状态方程和输出方程

将式(1-40)和式(1-41)中状态变量的一阶导数写在方程的左边,其余项写在方程的右边,

得以一阶微分方程组表示的状态方程为

$$\begin{cases} \frac{du_{C_0}}{dt} = -\frac{2}{R_0 C_0} u_{C_0} + \frac{1}{R_0 C_0} u_r \\ \frac{du_{C_1}}{dt} = -\frac{1}{R_0 C_1} u_{C_0} \end{cases} \quad (1-42)$$

由图 1-9 知,输出变量方程为

$$u_0 = i_t R_1 + u_{C_1} = -i_1 R_1 + u_{C_1} = -\frac{R_1}{R_0} u_{C_0} + u_{C_1} \quad (1-43)$$

(4) 列写状态空间表达式

将式(1-42)、式(1-43)写成向量-矩阵形式并合起来,则得向量-矩阵形式的状态空间表达式,即

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{du_{C_0}}{dt} \\ \frac{du_{C_1}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{R_0 C_0} & 0 \\ -\frac{1}{R_0 C_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C_0} \\ u_{C_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_0 C_0} \\ 0 \end{bmatrix} u_r \\ u_0 = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{R_0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C_0} \\ u_{C_1} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1-44)$$

令  $x_1 = u_{C_0}$ ,  $x_2 = u_{C_1}$ ,  $u = u_r$ ,  $y = u_0$ , 由式(1-44)可得状态空间表达式的一般式,即

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{R_0 C_0} & 0 \\ -\frac{1}{R_0 C_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_0 C_0} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{R_0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1-45)$$

若引入  $A = \begin{bmatrix} -\frac{2}{R_0 C_0} & 0 \\ -\frac{1}{R_0 C_1} & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_0 C_0} \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{R_0} & 1 \end{bmatrix}$ , 则得状态空间表达式的简洁形式,即

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (1-46)$$

**【例 1-5】** 考察图 1-10 所示电路,取电压源  $e$  为输入变量,  $R_1$  上的电压为输出变量,建立该电网的状态空间表达式,电压和电流为关联参考方向。

**解** (1) 选取状态变量

网络中只含有电容  $C$ 、电感  $L$  两个独立储能元件,选电容端电压  $u_C$ 、流经电感  $L$  的电流  $i_L$  作为状态变量。

(2) 利用电路基本定理列原始方程

$$\text{回路 I:} \quad R_0(i_C + i_L) + L \frac{di_L}{dt} = e \quad (1-47)$$

$$\text{回路 II:} \quad u_C + R_1 C \frac{du_C}{dt} = L \frac{di_L}{dt} \quad (1-48)$$

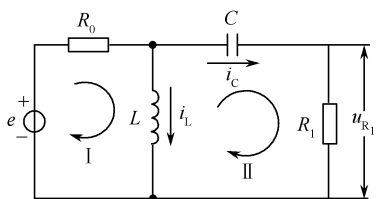


图 1-10 例 1-5 图

将  $i_c = C \frac{du_c}{dt}$  代入式(1-47),得

$$R_0 \left( C \frac{du_c}{dt} + i_L \right) + L \frac{di_L}{dt} = e \quad (1-49)$$

(3) 导出状态变量的一阶微分方程组

将式(1-49)和式(1-48)中状态变量  $i_L$ 、 $u_c$  的一阶导数移至方程的左边,而将其余项移到方程右边,得状态变量的一阶微分方程组为

$$\begin{aligned} R_0 C \frac{du_c}{dt} + L \frac{di_L}{dt} &= -R_0 i_L + e \\ R_1 C \frac{du_c}{dt} - L \frac{di_L}{dt} &= -u_c \end{aligned} \quad (1-50)$$

(4) 导出状态方程和输出方程

将状态变量的一阶导数看成待定量,用解代数方程方法求解式(1-50),即可求出状态方程。将式(1-50)可写成向量-矩阵形式的方程,即

$$\begin{bmatrix} L & R_0 C \\ -L & R_1 C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{du_c}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e \quad (1-51)$$

解之,得向量-矩阵形式的状态方程为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{du_c}{dt} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} L & R_0 C \\ -L & R_1 C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -R_0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L & R_0 C \\ -L & R_1 C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-R_0 R_1}{(R_0 + R_1)L} & \frac{R_0}{(R_0 + R_1)L} \\ \frac{-R_0}{(R_0 + R_1)C} & \frac{-1}{(R_0 + R_1)C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R_1}{(R_0 + R_1)L} \\ \frac{1}{(R_0 + R_1)C} \end{bmatrix} e \end{aligned} \quad (1-52)$$

输出方程为

$$\begin{aligned} u_{R_1} &= R_1 C \frac{du_c}{dt} = R_1 \left[ \frac{-R_0}{(R_0 + R_1)} i_L - \frac{1}{(R_0 + R_1)} u_c + \frac{1}{(R_0 + R_1)} e \right] \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{R_0 R_1}{R_0 + R_1} & -\frac{R_1}{R_0 + R_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_c \end{bmatrix} + \frac{R_1}{R_0 + R_1} e \end{aligned} \quad (1-53)$$

(5) 列写状态空间表达式

将式(1-52)和式(1-53)合起来即为状态空间表达式,若令  $x_1 = i_L$ ,  $x_2 = u_c$ ,  $u = e$ ,  $y = u_{R_1}$ , 则可得状态空间表达式的一般式,即

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_0 R_1}{(R_0 + R_1)L} & \frac{R_0}{(R_0 + R_1)L} \\ -\frac{R_0}{(R_0 + R_1)C} & \frac{-1}{(R_0 + R_1)C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R_1}{(R_0 + R_1)L} \\ \frac{1}{(R_0 + R_1)C} \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} -\frac{R_0 R_1}{R_0 + R_1} & -\frac{R_1}{R_0 + R_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{R_1}{R_0 + R_1} u \end{cases} \quad (1-54)$$

**【例 1-6】** 图 1-11 所示的机械平移系统模型,滑块  $M_1$ 、 $M_2$  的质量分别是  $M_1$ 、 $M_2$ ; 弹簧  $K_1$ 、 $K_2$  的弹性系数分别为  $K_1$ 、 $K_2$ ; 阻尼器  $B$  阻尼系数为  $B$ 。试建立以外力  $f$  为输入,滑块  $M_1$ 、 $M_2$

的位移  $\bar{y}_1$ 、 $\bar{y}_2$  为输出的状态空间表达式(忽略静摩擦与滑动摩擦)。

**解** (1) 选择状态变量

图 1-11 中的滑块  $M_1$ 、 $M_2$  和弹簧  $K_1$ 、 $K_2$  为相互独立的储能元件,故滑块  $M_1$ 、 $M_2$  的速度  $v_1$ 、 $v_2$  及位移  $\bar{y}_1$ 、 $\bar{y}_2$  可选作该系统的状态变量。

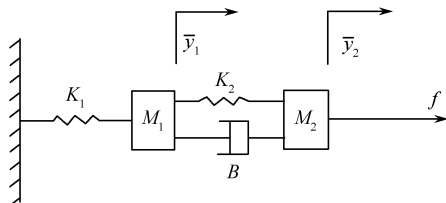


图 1-11 机械平移系统

(2) 列出机械运动的原始方程

由位移与速度的关系,有

$$\frac{d\bar{y}_1}{dt} = v_1 \quad (1-55)$$

$$\frac{d\bar{y}_2}{dt} = v_2 \quad (1-56)$$

根据牛顿运动定律,对于  $M_1$  有

$$M_1 \frac{dv_1}{dt} = K_2(\bar{y}_2 - \bar{y}_1) + B\left(\frac{d\bar{y}_2}{dt} - \frac{d\bar{y}_1}{dt}\right) - K_1\bar{y}_1 \quad (1-57)$$

同理,对于  $M_2$  有

$$M_2 \frac{dv_2}{dt} = f - K_2(\bar{y}_2 - \bar{y}_1) - B\left(\frac{d\bar{y}_2}{dt} - \frac{d\bar{y}_1}{dt}\right) \quad (1-58)$$

(3) 导出状态方程和输出方程

整理式(1-55)~式(1-58),得以一阶微分方程组表示的状态方程为

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{y}_1}{dt} &= v_1 \\ \frac{d\bar{y}_2}{dt} &= v_2 \\ \frac{dv_1}{dt} &= -\frac{1}{M_1}(K_1 + K_2)\bar{y}_1 + \frac{K_2}{M_1}\bar{y}_2 - \frac{B}{M_1}v_1 + \frac{B}{M_1}v_2 \\ \frac{dv_2}{dt} &= \frac{K_2}{M_2}\bar{y}_1 - \frac{K_2}{M_2}\bar{y}_2 + \frac{B}{M_2}v_1 - \frac{B}{M_2}v_2 + \frac{1}{M_2}f \end{aligned} \quad (1-59)$$

输出方程为

$$\begin{aligned} y_1 &= \bar{y}_1 \\ y_2 &= \bar{y}_2 \end{aligned} \quad (1-60)$$

(4) 列写状态空间表达式

令  $x_1 = \bar{y}_1$ ,  $x_2 = \bar{y}_2$ ,  $x_3 = v_1$ ,  $x_4 = v_2$ ,  $f = u$ , 则有状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K_1+K_2}{M_1} & \frac{K_2}{M_1} & -\frac{B}{M_1} & \frac{B}{M_1} \\ \frac{K_2}{M_2} & -\frac{K_2}{M_2} & \frac{B}{M_2} & -\frac{B}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M_2} \end{bmatrix} u \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1-61)$$

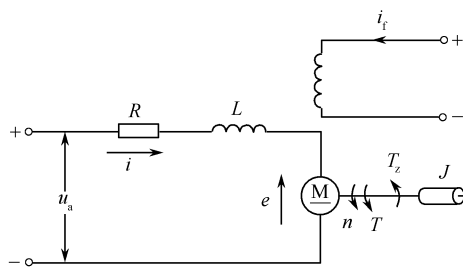


图 1-12 他励直流电动机拖动

**【例 1-7】** 图 1-12 所示为电枢控制的他励直流电动机拖动示意图,励磁电流  $i_f$  恒定,通过调节电枢供电电压  $u_a$  实现调速。其中, $R, L$  分别为电枢回路的电阻和电感; $e$  为电枢反电势; $J$  为电动机轴上的等效总转动惯量; $T$  为电动机电磁转矩; $T_z$  为折合到电动机轴上的总负载转矩; $B$  为电动机轴上的黏性摩擦系数。试建立以电枢电压  $u_a$ 、总负载转矩  $T_z$  为输入,电动机轴的转速  $n$  为

输出的状态空间表达式(不考虑电枢反应)。

**解** (1) 选择状态变量

因为电感  $L$  和转动惯量  $J$  为独立的储能元件,故可选相应的电枢回路电流  $i$  和电动机轴转速  $n$  这两个相互独立的变量为状态变量。

(2) 列写原始的运动方程

由基尔霍夫电压定律,列写电枢回路电压方程为

$$L \frac{di}{dt} + Ri + e = u_a \quad (1-62)$$

设电动机轴的角速度为  $\omega$  (rad/s),由牛顿力学定律,列写电动机转动方程为

$$T = J \frac{d\omega}{dt} + B\omega + T_z = J_G \frac{dn}{dt} + B_G n + T_z \quad (1-63)$$

式中,  $J_G = \frac{2\pi}{60} J$ ,  $B_G = \frac{2\pi}{60} B$ 。

根据电机学,电动机的电磁转矩及感应电动势分别为

$$T = C_T \Phi i = K_T i \quad (1-64)$$

$$e = C_e \Phi n = K_e n \quad (1-65)$$

式中,  $K_T = C_T \Phi$ ,  $K_e = C_e \Phi$ ,  $\Phi$  为直流电动机每极合成磁通,  $C_T, C_e$  分别是由电动机结构决定的转矩常数、电动势常数。

(3) 导出状态方程和输出方程

整理式(1-62)~式(1-65),得以一阶微分方程组表示的状态方程为

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i - \frac{K_e}{L}n + \frac{1}{L}u_a \quad (1-66)$$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{K_T}{J_G}i - \frac{B_G}{J_G}n - \frac{1}{J_G}T_z$$

输出方程为

$$y = n \quad (1-67)$$

(4) 列写状态空间表达式

令  $x_1 = i$ ,  $x_2 = n$ ,由式(1-66)和式(1-67)可得向量-矩阵形式的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K_e}{L} \\ \frac{K_T}{J_G} & -\frac{B_G}{J_G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ T_z \end{bmatrix} \\ y = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1-68)$$

**【例 1-8】** 图 1-13 所示为二级液位系统示意图,输入流量为  $Q$ ,输出流量为  $Q_2$ ,  $h_1, C_1$  和



$h_2$ 、 $C_2$  分别为液箱 1 和液箱 2 的液位、液容,两个液箱之间阀的液阻为  $R_1$ ,输出端阀的液阻为  $R_2$ 。设液体流动为层流(则系统可看作线性的),试建立其状态空间表达式。

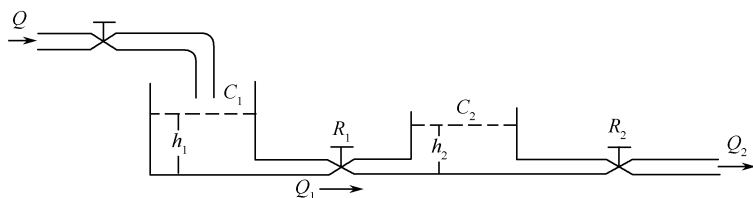


图 1-13 二级液位系统

**解** (1) 选择状态变量

根据流体流动的能量方程,可选相应的物理量  $h_1$ 、 $h_2$  作为状态变量。

(2) 列写原始的运动方程

$$dh_1 = \frac{(Q - Q_1) dt}{C_1} \quad (1-69)$$

$$dh_2 = \frac{(Q_1 - Q_2) dt}{C_2} \quad (1-70)$$

出口流量与液位差成比例,即

$$\frac{h_1 - h_2}{R_1} = Q_1 \quad (1-71)$$

$$\frac{h_2}{R_2} = Q_2 \quad (1-72)$$

(3) 导出状态方程和输出方程

整理式(1-69)~式(1-72),得状态变量一阶微分方程组为

$$\begin{cases} \frac{dh_1}{dt} = -\frac{1}{R_1 C_1} h_1 + \frac{1}{R_1 C_1} h_2 + \frac{1}{C_1} Q \\ \frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{R_1 C_2} h_1 - \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_2} h_2 \end{cases} \quad (1-73)$$

输出方程为

$$Q_2 = \frac{1}{R_2} h_2 \quad (1-74)$$

(4) 列写状态空间表达式的一般式

令  $x_1 = h_1$ ,  $x_2 = h_2$ ,  $Q = u$ ,  $y = Q_2$ , 且将式(1-73)和式(1-74)合起来,写成向量-矩阵形式,则得系统状态空间表达式的一般式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & \frac{1}{R_1 C_1} \\ \frac{1}{R_1 C_2} & -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1-75)$$

## 1.3 动态系统数学模型变换

### 1.3.1 状态向量的线性变换与状态空间表达式标准型

#### 1. 状态向量的线性变换

1.2 节已阐述过,给定线性定常系统的状态空间表达式不具有唯一性,选取不同的状态变

量,便会有不同的状态空间表达式。所任意选取的两个状态向量  $\mathbf{x}$  和  $\bar{\mathbf{x}}$  之间实际上存在线性非奇异变换(或称坐标变换)关系,即

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}} \quad \text{或} \quad \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x} \quad (1-76)$$

式中,  $\mathbf{T}$  为线性非奇异变换矩阵,  $\mathbf{T}^{-1}$  为  $\mathbf{T}$  的逆阵。而对应  $\mathbf{x}$  和  $\bar{\mathbf{x}}$  的两种状态空间表达式的矩阵与该非奇异变换矩阵  $\mathbf{T}$  有确定关系。

设给定系统在状态向量  $\mathbf{x}$  下的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases} \quad (1-77)$$

若引入式(1-76)所示的线性非奇异变换(称为对系统进行  $\mathbf{T}$  变换),将  $\mathbf{x}$  变换为  $\bar{\mathbf{x}}$ ,则系统在新的状态向量  $\bar{\mathbf{x}}$  下的状态空间表达式可将式(1-76)代入原状态空间表达式(1-77)得到,即

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{T}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\mathbf{u} = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{D}}\mathbf{u} \end{cases} \quad (1-78)$$

式中,  $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ ,  $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}$ ,  $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}$ ,  $\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D}$ 。显然,原状态空间中的系统矩阵  $\mathbf{A}$  与变换后的新状态空间中的系统矩阵  $\bar{\mathbf{A}}$  是相似矩阵,而相似矩阵具有相同的基本性质,例如,行列式相同、秩相同、特征多项式相同和特征值相同等。事实上,式(1-77)和式(1-78)均描述了同一给定系统。其能对该系统的时域行为表达同样的信息,即对系统进行线性非奇异变换,并不会改变系统的原有性质,故也称为等价变换。其是基于状态空间模型对系统进行分析 and 综合的一个重要方法。实际上,为了便于揭示系统特性或简化系统的分析、综合工作,通常通过状态向量的线性非奇异变换,将系统状态空间表达式等价变换为某种规范型,如能控标准型、能观标准型、对角线标准型、约当标准型等。

## 2. 系统的特征值

$n$  阶线性定常系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases}$$

的特征值即为其系统矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值,即特征方程

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \quad (1-79)$$

的根。其中,  $\mathbf{A}$  为  $n \times n$  维实数方阵,  $\mathbf{I}$  为  $n \times n$  维单位矩阵,  $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$  称为系统的特征多项式。因实际物理系统的系统矩阵  $\mathbf{A}$  为实数阵,故其特征值或为实数,或为共轭复数对。

由线性代数知,设  $\lambda_i$  是  $n$  阶方阵  $\mathbf{A}$  的一个特征值,若存在一个  $n$  维非零向量  $\mathbf{p}_i$ ,满足

$$\mathbf{A}\mathbf{p}_i = \lambda_i\mathbf{p}_i \quad \text{或} \quad (\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})\mathbf{p}_i = \mathbf{0} \quad (1-80)$$

则称  $\mathbf{p}_i$  为方阵  $\mathbf{A}$  对应于特征值  $\lambda_i$  的特征向量。

【例 1-9】求下列矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -6 & -11 & 6 \\ -6 & -11 & 5 \end{bmatrix}$$

的特征值和特征向量。

解  $\mathbf{A}$  的特征多项式为

$$f(\lambda) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ 6 & \lambda+11 & -6 \\ 6 & 11 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)$$

则  $\mathbf{A}$  的特征方程为

$$(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)=0$$

解之,得  $\mathbf{A}$  的特征值为

$$\lambda_1=-1, \lambda_2=-2, \lambda_3=-3$$

设对应于  $\lambda_1=-1$  的特征向量  $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix}$ , 则由式(1-80)的定义有

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -6 & -10 & 6 \\ -6 & -11 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

解之,得

$$p_{21}=0, p_{11}=p_{31}$$

令  $p_{11}=p_{31}=1$ , 则对应于  $\lambda_1=-1$  的特征向量可取为

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

同理,对应于  $\lambda_2=-2, \lambda_3=-3$  的特征向量分别可取为  $\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ 。

### 3. 系统特征值的不变性

系统经线性非奇异变换后,其特征多项式不变,即系统特征值不变。下面给出这一结论的证明。

不失一般性,设式(1-77)所示系统引入式(1-76)所示的线性非奇异变换,则变换后系统的特征多项式为

$$\begin{aligned} |\lambda \mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}| &= |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}| = |\lambda \mathbf{T}^{-1} \mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}| = |\mathbf{T}^{-1} (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{T}| \\ &= |\mathbf{T}^{-1}| |(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})| |\mathbf{T}| = |\mathbf{T}^{-1} \mathbf{T}| |(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})| = |(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})| \end{aligned} \quad (1-81)$$

上式表明,系统线性非奇异变换前、后的特征多项式完全相同,即系统特征值在线性非奇异变换下具有不变性。

### 4. 状态空间表达式化为对角线标准型

虽然通过线性非奇异变换,可以得到无数种系统的状态空间表达式,但能控标准型、能观标准型、对角线标准型和约当标准型等标准型状态空间表达式在简化系统的分析与设计中具有重要地位。因此,有必要讨论状态空间表达式的标准化问题。这里先讨论对角线标准型和约当标准型。

对于线性定常系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} \end{cases} \quad (1-82)$$

若系统的特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  互异,则必存在非奇异变换矩阵  $\mathbf{T}$ , 经  $\mathbf{x} = \mathbf{T} \bar{\mathbf{x}}$  或  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{x}$  的线性变换,可将状态空间表达式变换为对角线标准型,即

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{T} \bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{x}} \end{cases} \quad (1-83)$$

式中,  $\lambda_i (i=1, 2, \dots, n)$  是系统矩阵  $\mathbf{A}$  的  $n$  个互异特征值; 由式(1-80)求出对应于特征值  $\lambda_i$  的特征向量  $\mathbf{p}_i (i=1, 2, \dots, n)$ , 则变换矩阵  $\mathbf{T}$  由  $\mathbf{A}$  的特征向量  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$  构造, 即

$$\mathbf{T} = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \dots \quad \mathbf{p}_n] \quad (1-84)$$

且

$$\mathbf{A}\mathbf{p}_i = \lambda_i \mathbf{p}_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1-85)$$

应该指出, 对应于特征值  $\lambda_i$  的特征向量  $\mathbf{p}_i (i=1, 2, \dots, n)$  并非唯一, 因此, 式(1-84)所示由  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$  构造的变换矩阵  $\mathbf{T}$  也不是唯一的。

**【例 1-10】** 试将下列状态方程变换为对角线标准型。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} u$$

**解**  $\mathbf{A}$  的特征方程为

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

可见,  $\mathbf{A}$  的特征值互异, 且为  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$ 。由特征向量的定义, 可得出  $\mathbf{A}$  分别属于  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  的特征向量  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ 。

$$\text{由 } \mathbf{A}\mathbf{p}_1 = \lambda_1 \mathbf{p}_1, \text{ 即} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix}$$

得

$$\begin{cases} p_{21} + p_{31} = 0 \\ 3p_{21} = 0 \\ -2p_{21} + p_{31} = 0 \end{cases}$$

解之, 得

$$\begin{cases} p_{11} = K (\text{任意常值}) \\ p_{21} = 0 \\ p_{31} = 0 \end{cases}$$

可见, 对应于特征值  $\lambda_1 = 2$  的特征向量并非唯一, 可取为  $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 。

同理, 对应于  $\lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$  的特征向量分别可取为  $\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ , 于是得到线性非

奇异变换矩阵

$$\mathbf{T} = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \mathbf{p}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

其逆矩阵为

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

则引入  $\mathbf{x} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}$  线性变换后的系统矩阵、输入矩阵分别为

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

变换后的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \\ \dot{\bar{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

以上讨论是在  $\mathbf{A}$  矩阵为任意形式时进行的,下面对  $\mathbf{A}$  矩阵为“友矩阵”这一标准型的情况进行讨论。若  $n$  阶方阵  $\mathbf{A}$  的形状为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad (1-86)$$

其特征多项式为

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n \quad (1-87)$$

数学上称形如式(1-86)的矩阵为相伴矩阵或友矩阵。友矩阵的特点是主对角线上方的元素均为1;最后一行的元素与其特征多项式的系数有一一对应关系(如式(1-86)和式(1-87)所示);而其余元素均为零。

可以证明,若  $n$  阶方阵  $\mathbf{A}$  为友矩阵,且有  $n$  个互异特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ ,则以下列范德蒙德(Vandermonde)矩阵  $\mathbf{T}$  为变换矩阵,可将  $\mathbf{A}$  阵化为对角线矩阵,即

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad (1-88a)$$

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (1-88b)$$

式(1-88b)中,  $\mathbf{A}$  为式(1-86)所示的  $n \times n$  维友矩阵,且其  $n$  个特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$  互异,  $\mathbf{T}$  为式(1-88a)所示的范德蒙德矩阵。

## 5. 状态空间表达式化为约当(Jordan)标准型

当  $n$  阶系统矩阵  $\mathbf{A}$  具有重特征值时,若  $\mathbf{A}$  仍然有  $n$  个独立的特征向量,则可将  $\mathbf{A}$  化为对角线型矩阵;若  $\mathbf{A}$  独立特征向量的个数少于  $n$ ,可将  $\mathbf{A}$  变换为约当标准型。

下面讨论一种特殊情况。设  $n$  阶系统矩阵  $\mathbf{A}$  具有  $m$  重特征值  $\lambda_1$ ,其余  $(n-m)$  个特征值  $\lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}, \cdots, \lambda_n$  为互异特征值,且  $\mathbf{A}$  对应于  $m$  重特征值  $\lambda_1$  的独立特征向量只有一个,则  $\mathbf{A}$  经线性变换可化为约当标准型  $\mathbf{J}$ ,即

$$\mathbf{J} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 & & & 0 \\ & \lambda_1 & \ddots & & & & \\ & & \ddots & & 1 & & \\ 0 & & & \lambda_1 & & & \\ \hline & & & & \lambda_{m+1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (1-89)$$

上式  $\mathbf{J}$  中用虚线示出一个对应  $m$  重特征值  $\lambda_1$  的  $m$  阶约当块  $\mathbf{J}_1$ ,  $m$  阶约当块  $\mathbf{J}_1$  是主对角线上的元素为  $m$  重特征值  $\lambda_1$ 、主对角线上方的次对角线上的元素均为 1、其余元素均为零的  $m \times m$  维子矩阵, 即

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_1 \end{bmatrix}_{m \times m} \quad (1-90)$$

由于任意一个 1 阶矩阵都是 1 阶约当块, 因此, 式(1-89)所示的约当标准型是由  $n-m+1$  个约当块组成的分块对角矩阵, 即每个独立特征向量对应一个约当块。

可以证明式(1-89)中的线性非奇异变换矩阵  $\mathbf{T}$  为

$$\mathbf{T} = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_m \quad \mathbf{p}_{m+1} \quad \cdots \quad \mathbf{p}_n] \quad (1-91)$$

式中,  $\mathbf{p}_1$  为  $m$  重特征值  $\lambda_1$  对应的特征向量;  $\mathbf{p}_{m+1} \cdots \mathbf{p}_n$  为其余  $(n-m)$  个互异特征值  $\lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}, \cdots, \lambda_n$  对应的特征向量;  $\mathbf{p}_2 \cdots \mathbf{p}_m$  则为  $m$  重特征值  $\lambda_1$  对应的广义特征向量, 即满足

$$\begin{cases} \mathbf{A} \mathbf{p}_1 = \lambda_1 \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{A} \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 + \lambda_1 \mathbf{p}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A} \mathbf{p}_m = \mathbf{p}_{m-1} + \lambda_1 \mathbf{p}_m \\ \mathbf{A} \mathbf{p}_{m+1} = \lambda_{m+1} \mathbf{p}_{m+1} \\ \vdots \\ \mathbf{A} \mathbf{p}_n = \lambda_n \mathbf{p}_n \end{cases} \quad (1-92a)$$

整理式(1-92a) 得

$$\begin{cases} (\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{p}_1 = \mathbf{0} \\ (\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ (\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{p}_m = -\mathbf{p}_{m-1} \\ (\lambda_{m+1} \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{p}_{m+1} = \mathbf{0} \\ \vdots \\ (\lambda_n \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{p}_n = \mathbf{0} \end{cases} \quad (1-92b)$$

**【例 1-11】** 将下列系统的状态空间表达式变换为约当标准型。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0 \quad 0] \mathbf{x} \end{cases}$$

**解** 系统矩阵为友矩阵,由其最后一行元素可直接写出特征方程

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^3 - 3\lambda - 2 = (\lambda + 1)^2(\lambda - 2) = 0$$

解得  $\mathbf{A}$  矩阵的特征值

$$\lambda_1 = -1 (2 \text{ 重}), \lambda_3 = 2$$

按照式(1-92)求变换矩阵  $\mathbf{T}$ , 对应于  $\lambda_1 = -1$  的特征向量由下列方程求

$$(\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

满足上列方程的独立特征向量个数为 1, 解之得  $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

再求对应于 2 重特征值  $\lambda_1 = -1$  的一个广义特征向量  $\mathbf{p}_2$ , 将求得的  $\mathbf{p}_1$  代入  $(\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$  得

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

解之得  $\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

最后求对应于特征值  $\lambda_3 = 2$  的一个特征向量  $\mathbf{p}_3$ , 由

$$(\lambda_3 \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

解之, 得  $\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

则可构造线性非奇异变换矩阵  $\mathbf{T}$  为

$$\mathbf{T} = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \mathbf{p}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

则  $\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 6 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

则引入  $\mathbf{x} = \mathbf{T} \bar{\mathbf{x}}$  线性变换后的系统矩阵、输入矩阵、输出矩阵分别为

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \left[ \begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{T} = [1 \quad 1 \quad 1]$$

以上关于系统矩阵  $\mathbf{A}$  经线性变换化为约当标准型  $\mathbf{J}$  的讨论, 仅仅是针对  $\mathbf{A}$  矩阵的  $m$  重特征值  $\lambda_i$  对应的独立特征向量只有一个这一特殊情况进行的。应该指出, 当  $n$  阶系统矩阵  $\mathbf{A}$  具有  $m_i$  重特征值  $\lambda_i$  时(数学上称  $\lambda_i$  的代数重数为  $m_i$ ), 与  $\lambda_i$  对应的线性独立特征向量数目等于其几何重数  $\alpha_i$ ,  $\alpha_i = n - \text{rank}(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})$ , 其中  $\text{rank}$  为求矩阵的秩且  $1 \leq \alpha_i \leq m_i$ 。读者可验证例 1-11 中的二重特征值  $-1$  的几何重数为 1。若  $\mathbf{A}$  矩阵的  $m$  重特征值  $\lambda_1$  的几何重数即独立特征向量个数为  $l$  ( $1 < l < m$ ), 则  $\mathbf{A}$  矩阵的约当标准型应有  $l$  个约当块与其  $m$  重特征值  $\lambda_1$  对应。另一特殊的情况,  $n$  阶系统矩阵  $\mathbf{A}$  具有  $m$  重特征值  $\lambda_1$ , 其余  $(n-m)$  个特征值  $\lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}, \dots, \lambda_n$  为互异特征值, 但若  $m$  重特征值  $\lambda_1$  对应的几何重数即独立特征向量个数为  $m$ , 则应有  $m$  个一阶约当块与其  $m$  重特征值  $\lambda_1$  对应, 这时约当型就成为对角线标准型。总之, 约当矩阵是相应于系统具有重特征值情况下状态变量之间可能的最简耦合形式。在这种形式下, 各状态变量至多和下一序号的状态变量发生联系。

以上主要讨论了系统的线性变换及如何将状态空间表达式化为特征标准型(对角线标准型或约当标准型)的问题, 在第 3 章中将讨论化能控系统为能控标准型和化能观系统为能观标准型的问题。

### 1.3.2 系统的高阶微分方程描述化为状态空间描述

在经典控制理论中, 对线性定常系统常采用常微分方程和传递函数来描述系统输入和输出关系。在现代控制理论中, 由描述系统输入、输出动态关系的微分方程或传递函数建立系统状态空间表达式的问题称为实现问题, 要求所求得的状态空间表达式既保持原系统的输入、输出关系不变, 又揭示出系统的内部关系。实现问题的复杂性在于, 根据输入、输出关系求得的状态空间表达式并非唯一, 因为会有无数个不同的内部结构均能获得相同的输入、输出关系。

#### 1. 微分方程中输入函数不含导数项的情况

当单输入单输出线性定常连续系统的输入量中不含导数项时, 描述该系统微分方程的一般形式为

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = bu \quad (1-93)$$

根据微分方程理论, 若给定初始条件  $y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$  及  $t \geq 0$  时的输入  $u(t)$ , 则系统微分方程的解是唯一的, 即该系统在  $t \geq 0$  时的行为是完全确定的。故可选取  $x_1 = y, x_2 = \dot{y}, \dots, x_n = y^{(n-1)}$  这  $n$  个变量作为状态变量, 将式(1-93)化为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = y^{(n-1)} = x_n \\ \dot{x}_n = y^{(n)} = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_2 x_{n-1} - a_1 x_n + bu \\ y = x_1 \end{cases} \quad (1-94)$$

则其向量-矩阵方程形式的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (1-95)$$



$$\text{式中, } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0].$$

其中,  $\mathbf{A}$  矩阵为友矩阵。

与式(1-94)对应的系统模拟结构图(状态变量图)如图 1-14 所示。

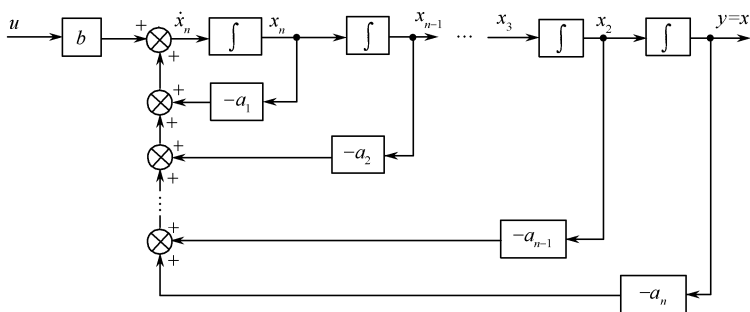


图 1-14 式(1-93)系统模拟结构图(状态变量图)(与式(1-94)对应)

从输入、输出的关系看,图 1-15 所示的结构图与图 1-14 的结构图是等效的。对应于图 1-15,式(1-93)系统的另一种状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [b \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1-96)$$

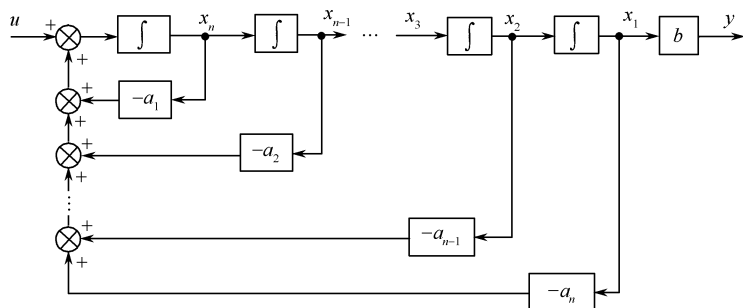


图 1-15 式(1-93)系统的另一种模拟结构图(状态变量图)(与式(1-96)对应)

**【例 1-12】** 设系统的微分方程为:  $\ddot{y} + 5\dot{y} + 13\dot{y} + 7y = 6u$ , 求系统的状态空间表达式。

**解** 选取  $y, \dot{y}, \ddot{y}$  为状态变量, 即  $x_1 = y, x_2 = \dot{y}, x_3 = \ddot{y}$ , 则由系统的微分方程得状态空间表达式, 即

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -7x_1 - 13x_2 - 5x_3 + 6u \\ y = x_1 \end{cases}$$

其向量-矩阵方程形式的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -7 & -13 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

## 2. 微分方程中输入函数含有导数项的情况

当单输入单输出线性定常连续系统的输入量中含有导数项时(一般输入量导数的阶数小于或等于系统的阶数  $n$ ),描述该系统微分方程的一般形式为

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1} \dot{u} + b_n u \quad (1-97)$$

在这种情况下,不能选用  $y, \dot{y}, \cdots, y^{(n-1)}$  作为状态变量,否则状态方程中包含有输入信号  $u$  的导数项。它可能导致系统在状态空间中的运动出现无穷大的跳变,方程解的存在性和唯一性将被破坏。为了避免这种情况的产生,通常选用输出  $y$  和输入  $u$  及它们的各阶导数组成状态变量,以保证状态方程中不含  $u$  的导数项。下面介绍两种常用的方法。

**方法一** 若选取如下一组状态变量

$$\begin{cases} x_1 = y - \beta_0 u \\ x_2 = \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u \\ x_3 = \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u \\ \vdots \\ x_{n-1} = y^{(n-2)} - \beta_0 u^{(n-2)} - \beta_1 u^{(n-3)} - \cdots - \beta_{n-2} u \\ x_n = y^{(n-1)} - \beta_0 u^{(n-1)} - \beta_1 u^{(n-2)} - \cdots - \beta_{n-1} u \end{cases} \quad (1-98)$$

式中,  $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1}$  为  $n$  个待定系数。对式(1-98)求导,可得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} - \beta_0 \dot{u} = x_2 + \beta_1 u \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} = x_3 + \beta_2 u \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = y^{(n-1)} - \beta_0 u^{(n-1)} - \beta_1 u^{(n-2)} - \cdots - \beta_{n-2} \dot{u} = x_n + \beta_{n-1} u \\ \dot{x}_n = y^{(n)} - \beta_0 u^{(n)} - \beta_1 u^{(n-1)} - \cdots - \beta_{n-1} \dot{u} \end{cases} \quad (1-99)$$

由微分方程式(1-97)及式(1-98)所确定的  $y$  的各阶导数与状态变量之间的关系,可得

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= -a_1 y^{(n-1)} - a_2 y^{(n-2)} - \cdots - a_{n-1} \dot{y} - a_n y + b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1} \dot{u} + b_n u \\ &= -a_1 x_n - a_2 x_{n-1} - \cdots - a_{n-1} x_2 - a_n x_1 \\ &\quad - a_1 (\beta_0 u^{(n-1)} + \beta_1 u^{(n-2)} + \cdots + \beta_{n-1} u) \\ &\quad - a_2 (\beta_0 u^{(n-2)} + \beta_1 u^{(n-3)} + \cdots + \beta_{n-2} u) \\ &\quad - \cdots \\ &\quad - a_{n-1} (\beta_0 \dot{u} + \beta_1 u) \\ &\quad - a_n \beta_0 u + b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1} \dot{u} + b_n u \end{aligned}$$

将上式代入式(1-99)中最后一行,可得

$$\begin{aligned}\dot{x}_n = & -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \cdots - a_2 x_{n-1} - a_1 x_n \\ & + (b_0 - \beta_0) u^{(n)} + (b_1 - \beta_1 - a_1 \beta_0) u^{(n-1)} + (b_2 - \beta_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0) u^{(n-2)} \\ & + \cdots \\ & + (b_{n-1} - \beta_{n-1} - a_1 \beta_{n-2} - a_2 \beta_{n-3} - \cdots - a_{n-1} \beta_0) \dot{u} \\ & + (b_n - a_1 \beta_{n-1} - a_2 \beta_{n-2} - \cdots - a_n \beta_0) u\end{aligned}\quad (1-100)$$

令式(1-100)中  $u$  的各阶导数的系数为零,可确定  $n$  个待定系数  $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1}$  为

$$\begin{cases} \beta_0 = b_0 \\ \beta_1 = b_1 - a_1 \beta_0 \\ \beta_2 = b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} = b_{n-1} - a_1 \beta_{n-2} - a_2 \beta_{n-3} - \cdots - a_{n-1} \beta_0 \end{cases}\quad (1-101)$$

且令式(1-100)中  $u$  的系数为  $\beta_n$ ,即

$$\beta_n = b_n - a_1 \beta_{n-1} - a_2 \beta_{n-2} - \cdots - a_n \beta_0\quad (1-102)$$

为便于记忆,式(1-101)和式(1-102)也可写成式(1-103)的矩阵形式,即

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}\quad (1-103)$$

则式(1-100)成为

$$\dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \cdots - a_2 x_{n-1} - a_1 x_n + \beta_n u\quad (1-104)$$

则式(1-97)的向量-矩阵形式的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_0 u \end{cases}\quad (1-105)$$

式中,  $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1}$  及  $\beta_n$  由式(1-101)及式(1-102)确定。与式(1-105)对应的系统模拟结构图(状态变量图)如图 1-16 所示。

**【例 1-13】** 已知系统的微分方程为:  $\ddot{y} + 6\dot{y} + 11y = \ddot{u} + 9\dot{u} + 4u$ , 试列写状态空间表达式。

**解** 由微分方程可知各项系数为

$$\begin{aligned}a_1 &= 6, a_2 = 11, a_3 = 6 \\ b_0 &= 0, b_1 = 1, b_2 = 9, b_3 = 4\end{aligned}$$

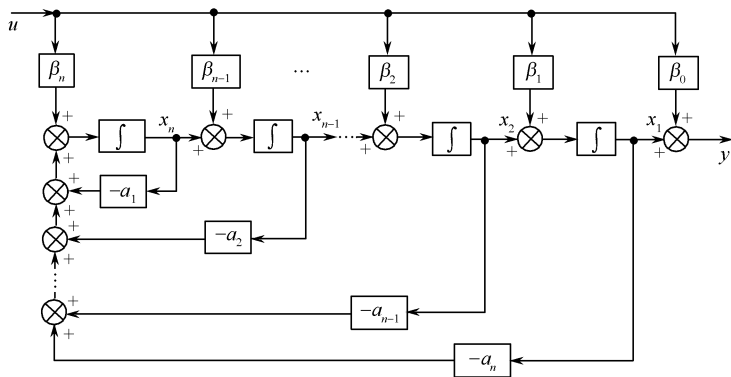


图 1-16 式(1-97)系统的模拟结构图

由式(1-101)和式(1-102)可确定

$$\beta_0 = b_0 = 0, \beta_1 = b_1 - a_1\beta_0 = 1$$

$$\beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 = 3$$

$$\beta_3 = b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_3\beta_0 = -25$$

从而得到系统状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -25 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

方法二 设系统微分方程为

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1} \dot{u} + b_n u \quad (1-106)$$

引入微分算子

$$L(p) = \alpha_0 \frac{d^n}{dt^n} + \alpha_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + \alpha_{n-1} \frac{d}{dt} + \alpha_n \quad (1-107)$$

微分算子本身并无意义,它是一种数学符号,一旦作用于函数,即产生意义。如令

$$L(p)u(t) = \alpha_0 \frac{d^n u(t)}{dt^n} + \alpha_1 \frac{d^{n-1} u(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + \alpha_{n-1} \frac{du(t)}{dt} + \alpha_n u(t) \quad (1-108)$$

则为被作用函数各阶导数代数数和。

若令

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n} + \alpha_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + \alpha_{n-1} \frac{d}{dt} + \alpha_n &= p^n \\ b_0 \frac{d^n}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + b_{n-1} \frac{d}{dt} + b_n &= m^n \end{aligned} \quad (1-109)$$

原微分方程式(1-106)化为

$$p^n y = m^n u \quad (1-110)$$

引入中间变量  $z$ , 令

$$u = z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} \dot{z} + a_n z = p^n z \quad (1-111)$$

则有  $p^n y = m^n u = m^n p^n z$ , 所以得出

$$y = m^n z = b_0 z^{(n)} + b_1 z^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1} \dot{z} + b_n z \quad (1-112)$$

经上述推导, 可将原微分方程分解成如下两个方程

$$\begin{aligned} u &= z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} \dot{z} + a_n z \\ y &= b_0 z^{(n)} + b_1 z^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1} \dot{z} + b_n z \end{aligned}$$

选择系统的状态变量为

$$\begin{cases} x_1 = z \\ x_2 = \dot{z} \\ \vdots \\ x_{n-1} = z^{(n-2)} \\ x_n = z^{(n-1)} \end{cases}$$

得系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \cdots - a_2 x_{n-1} - a_1 x_n + u \end{cases} \quad (1-113)$$

输出方程为

$$\begin{aligned} y &= b_0 (-a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \cdots - a_2 x_{n-1} - a_1 x_n + u) + b_1 x_n + b_2 x_{n-1} + \cdots + b_{n-1} x_2 + b_n x_1 \\ &= (b_n - a_n b_0) x_1 + (b_{n-1} - a_{n-1} b_0) x_2 + \cdots + (b_2 - a_2 b_0) x_{n-1} + (b_1 - a_1 b_0) x_n + b_0 u \end{aligned} \quad (1-114)$$

由式(1-113)和式(1-114)得式(1-106)的向量-矩阵形式的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [b_n - a_n b_0 \quad b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \quad \cdots \quad b_2 - a_2 b_0 \quad b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \end{cases} \quad (1-115)$$

若输入量导数的阶数小于系统的阶数  $n$ , 描述系统的微分方程为

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_1 u^{(n-1)} + b_2 u^{(n-2)} + \cdots + b_{n-1} \dot{u} + b_n u \quad (1-116)$$

则将  $b_0 = 0$  代入式(1-115), 即可得到式(1-116)对应的状态空间表达式。但  $b_0 = 0$  时, 也可按下规则选择另一组状态变量, 即

$$\begin{cases} x_n = y \\ x_i = \dot{x}_{i+1} + a_{n-i} y - b_{n-i} u, i = 1, \cdots, n-1 \end{cases} \quad (1-117)$$

展开式(1-117)得

$$\begin{aligned}
 x_n &= y \\
 x_{n-1} &= \dot{x}_n + a_1 y - b_1 u = \dot{y} + a_1 y - b_1 u \\
 x_{n-2} &= \dot{x}_{n-1} + a_2 y - b_2 u = \ddot{y} + a_1 \dot{y} - b_1 \dot{u} + a_2 y - b_2 u \\
 &\vdots \\
 x_2 &= \dot{x}_3 + a_{n-2} y - b_{n-2} u = y^{(n-2)} + a_1 y^{(n-3)} - b_1 u^{(n-3)} + a_2 y^{(n-4)} - b_2 u^{(n-4)} + \cdots + a_{n-2} y - b_{n-2} u \\
 x_1 &= \dot{x}_2 + a_{n-1} y - b_{n-1} u \\
 &= y^{(n-1)} + a_1 y^{(n-2)} - b_1 u^{(n-2)} + a_2 y^{(n-3)} - b_2 u^{(n-3)} + \cdots + a_{n-2} \dot{y} - b_{n-2} \dot{u} + a_{n-1} y - b_{n-1} u
 \end{aligned} \tag{1-118}$$

则有 $(n-1)$ 个一阶微分方程

$$\begin{cases} \dot{x}_n = x_{n-1} - a_1 x_n + b_1 u \\ \dot{x}_{n-1} = x_{n-2} - a_2 x_n + b_2 u \\ \vdots \\ \dot{x}_3 = x_2 - a_{n-2} x_n + b_{n-2} u \\ \dot{x}_2 = x_1 - a_{n-1} x_n + b_{n-1} u \end{cases} \tag{1-119}$$

由式(1-118)对 $x_1$ 求导得

$$\dot{x}_1 = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} - b_1 u^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} - b_2 u^{(n-2)} + \cdots + a_{n-2} \ddot{y} - b_{n-2} \ddot{u} + a_{n-1} \dot{y} - b_{n-1} \dot{u} \tag{1-120}$$

将式(1-116)代入式(1-120)得

$$\dot{x}_1 = -a_n y + b_n u = -a_n x_n + b_n u \tag{1-121}$$

由式(1-119)、式(1-121)及 $x_n = y$ ,可得式(1-116)系统的另一种形式的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \end{cases} \tag{1-122}$$

### 1.3.3 系统的传递函数描述化为状态空间描述

SISO 线性定常系统的传递函数定义为零初始条件下,系统输出变量的拉普拉斯变换与输入变量的拉普拉斯变换之比。将传递函数多项式中的变量 $s$ 用算符 $d/dt$ 置换便得到相对应的微分方程,因此,由传递函数建立系统状态空间表达式的方法之一是将传递函数化为微分方程,再应用1.3.2节介绍的方法求状态空间表达式。本节介绍将传递函数进行分解直接获得状态空间表达式的实现方法,其可视为MIMO系统传递函数阵实现的特例,关于MIMO系统传递函数阵

实现问题在第3章中讨论。与高阶微分方程实现的非唯一性一样,从给定描述系统输入、输出动态关系的传递函数所求得的状态空间表达式也可以有无数个。

设单变量线性定常系统的传递函数为

$$\bar{G}(s) = \frac{\beta_0 s^m + \beta_1 s^{m-1} + \cdots + \beta_{m-1} s + \beta_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \quad (1-123)$$

式中,  $a_i (i=1, 2, \cdots, n), \beta_j (j=0, 1, 2, \cdots, m)$  均为实数, 且不失一般性, 设  $n \geq m$ 。若  $n > m$ ,  $\bar{G}(s)$  为严格有理真分式, 其状态空间实现中的直接传递矩阵  $\mathbf{D}=0$ , 系统称为严格正常型(或绝对固有系统); 若  $m=n$ , 通过长除法将式(1-123)改写为

$$\bar{G}(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} + d = G(s) + d \quad (1-124)$$

即当传递函数的分子阶次等于分母阶次时, 输出含有与输入直接关联的项, 其状态空间实现中的直接传递矩阵  $\mathbf{D}=d$ , 系统称为正常型; 若  $m > n$  时, 称为非正常型, 不能求得其实实现。

虽然状态变量的选取并非唯一, 但只要传递函数中分子、分母没有公因子, 即不出现零极点抵消, 则  $n$  阶系统必有  $n$  个独立的状态变量, 必可分解成  $n$  个一阶系统, 每一种实现的系统矩阵的阶次均为  $n$  且具有相同的特征值。这种分子、分母没有公因子的传递函数的实现称为最小实现, 本节仅讨论最小实现。

下面讨论将级联法、串联法和并联法3种分解方法用于式(1-125)中一般  $n$  阶严格有理真分式传递函数  $G(s)$  的实现。

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \quad (1-125)$$

式中,  $a_i, b_i (i=1, 2, \cdots, n)$  为实数常系数。

### 1. 系统实现的级联法

将式(1-125)改写为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s^{-1} + b_2 s^{-2} + \cdots + b_{n-1} s^{-(n-1)} + b_n s^{-n}}{1 + a_1 s^{-1} + \cdots + a_{n-1} s^{-(n-1)} + a_n s^{-n}} \quad (1-126)$$

然后在传递函数的分子和分母上同乘一中间变量  $M(s)$  得

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(b_1 s^{-1} + b_2 s^{-2} + \cdots + b_{n-1} s^{-(n-1)} + b_n s^{-n}) M(s)}{(1 + a_1 s^{-1} + \cdots + a_{n-1} s^{-(n-1)} + a_n s^{-n}) M(s)}$$

则有

$$M(s) = U(s) - a_1 s^{-1} M(s) - \cdots - a_{n-1} s^{-(n-1)} M(s) - a_n s^{-n} M(s)$$

$$Y(s) = b_1 s^{-1} M(s) + b_2 s^{-2} M(s) + \cdots + b_{n-1} s^{-(n-1)} M(s) + b_n s^{-n} M(s)$$

若指定每个积分器的输出为状态变量

$$x_1 = L^{-1}(s^{-n} M(s))$$

$$x_2 = L^{-1}(s^{-(n-1)} M(s))$$

$$\vdots$$

$$x_n = L^{-1}(s^{-1} M(s))$$

相应的系统模拟结构图(状态变量图)如图1-17所示, 其中  $1/s$  表示积分环节。

由图1-17写出式(1-125)系统采用级联法实现的状态空间表达式为

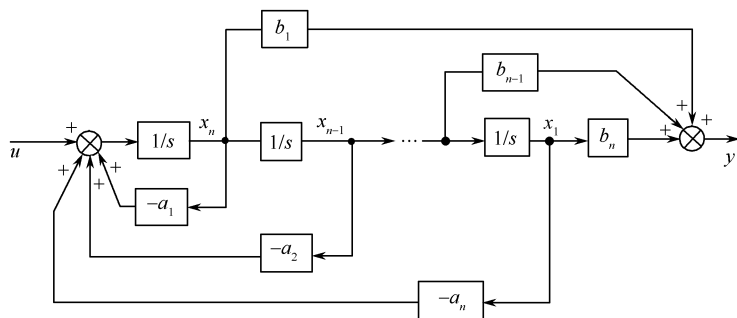


图 1-17 式(1-125)系统采用级联法实现的状态变量图(能控标准型实现)

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [b_n \quad b_{n-1} \quad \cdots \quad b_2 \quad b_1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1-127)$$

注意:式(1-127)中状态方程的系数矩阵  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$  的结构特征( $\mathbf{B}$  中最后一个元素为 1,而其余元素为零; $\mathbf{A}$  为友矩阵)。若单输入量系统状态空间表达式中的  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$  具有这种标准形式,则称其为状态空间表达式的能控标准型。因此,式(1-127)也称为式(1-125)系统的能控标准型实现。显然,系统传递函数式(1-125)对应的微分方程即为式(1-116),将  $b_0=0$  代入式(1-115)也可得到系统的能控标准型状态空间表达式(1-127)。若按式(1-117)选取状态变量,式(1-125)系统的另一种形式的状态空间表达式则为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1-128)$$

注意式(1-128)中系数矩阵  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{C}$  的结构特征( $\mathbf{C}$  中最后一个元素为 1,而其余元素为零; $\mathbf{A}$  为友矩阵的转置)。若单输出系统状态空间表达式中的  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{C}$  具有这种标准形式,则称其为状态空间表达式的能观标准型。因此,式(1-128)也称为式(1-125)系统的能观标准型实现,相应的状态变量图如图 1-18 所示。

由式(1-127)及式(1-128)可见,式(1-125)系统的能控标准型实现  $\Sigma_c(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c)$  和能观标准型实现  $\Sigma_o(\mathbf{A}_o, \mathbf{B}_o, \mathbf{C}_o)$  中的各系数矩阵具有如式(1-129)所示的对偶关系,即

$$\mathbf{A}_o = \mathbf{A}_c^T, \mathbf{B}_o = \mathbf{C}_c^T, \mathbf{C}_o = \mathbf{B}_c^T \quad (1-129)$$

式中,上标 T 为矩阵转置符号。



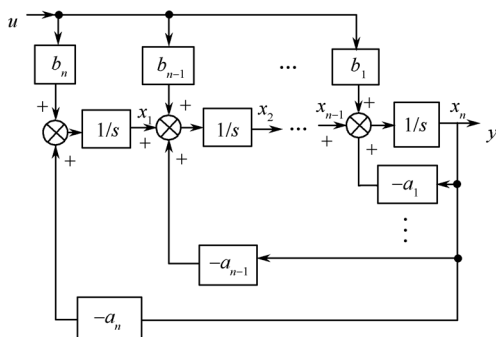


图 1-18 式(1-125)系统的能观标准型实现

**【例 1-14】** 已知系统传递函数为  $G(s) = \frac{5s+1}{s^3+2s^2+3s+4}$ , 试求其能控标准型、能观标准型状态空间表达式。

**解** 由式(1-127)得系统的能控标准型实现为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c u \\ y = \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c \end{cases}$$

式中,  $\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{C}_c = [1 \quad 5 \quad 0]$ 。

由式(1-128)得系统的能观标准型实现为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_o = \mathbf{A}_o \mathbf{x}_o + \mathbf{B}_o u \\ y = \mathbf{C}_o \mathbf{x}_o \end{cases}$$

式中,  $\mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{B}_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{C}_o = [0 \quad 0 \quad 1]$ 。

## 2. 系统实现的串联法

串联法的基本思路是将传递函数  $G(s)$  的分子多项式和分母多项式分别进行因式分解, 从而将  $G(s)$  表达成若干个一阶、二阶传递函数的乘积, 分别对各个一阶、二阶子系统模拟, 再将它们串联起来得到系统模拟结构图, 由系统模拟结构图即可写出状态空间表达式。下面举例说明。

**【例 1-15】** 设系统传递函数已分解为因式相乘形式(即零点、极点形式), 即

$$G(s) = \frac{b_1(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_{n-2})(s+z_{n-1})}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_{n-1})(s+p_n)} \quad (1-130)$$

式中,  $z_i$  和  $p_j$  均为实数( $i=1, 2, \dots, n-1; j=1, 2, \dots, n$ ), 试用串联法求其状态空间表达式。

**解** 将式(1-130)改写为

$$G(s) = \frac{b_1}{(s+p_1)} \times \frac{(s+z_1)}{(s+p_2)} \times \cdots \times \frac{(s+z_{n-2})}{(s+p_{n-1})} \times \frac{(s+z_{n-1})}{(s+p_n)} \quad (1-131)$$

上式表明, 系统可看成由  $n$  个一阶子系统串联而成, 分别对各一阶子系统进行模拟, 再将它们串

联起来即得系统的模拟结构图,如图 1-19 所示。选每个积分器的输出为系统状态变量,则由图 1-19可写出系统状态方程及输出方程分别为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -p_1 x_1 + b_1 u \\ \dot{x}_2 = x_1 - p_2 x_2 \\ \dot{x}_3 = x_1 + (z_1 - p_2)x_2 - p_3 x_3 \\ \dot{x}_4 = x_1 + (z_1 - p_2)x_2 + (z_2 - p_3)x_3 - p_4 x_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = x_1 + (z_1 - p_2)x_2 + (z_2 - p_3)x_3 + \cdots + (z_{n-2} - p_{n-1})x_{n-1} - p_n x_n \end{cases} \quad (1-132)$$

$$y = x_1 + (z_1 - p_2)x_2 + (z_2 - p_3)x_3 + \cdots + (z_{n-1} - p_n)x_n \quad (1-133)$$

则向量-矩阵形式的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -p_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & z_1 - p_2 & -p_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & z_1 - p_2 & z_2 - p_3 & -p_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_1 - p_2 & z_2 - p_3 & z_3 - p_4 & \cdots & -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad z_1 - p_2 \quad z_2 - p_3 \quad z_3 - p_4 \quad \cdots \quad z_{n-1} - p_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \end{cases}$$

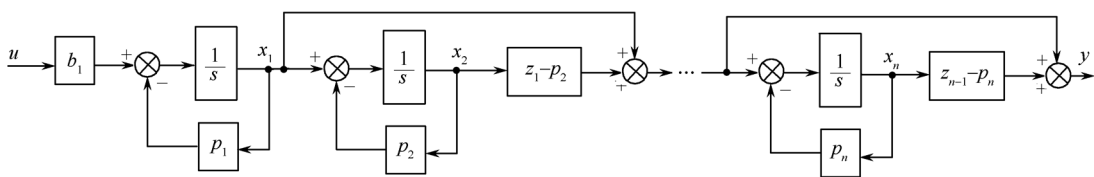


图 1-19 式(1-130)系统的串联实现

**【例 1-16】** 已知系统传递函数为

$$G(s) = \frac{b_0}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n)} \quad (1-134)$$

试求其状态空间表达式。

**解** 将传递函数分解为因式相乘的形式,即

$$G(s) = \frac{1}{(s-\lambda_1)} \times \frac{1}{(s-\lambda_2)} \times \cdots \times \frac{b_0}{(s-\lambda_n)}$$

其串联实现的模拟结构图如图 1-20 所示。

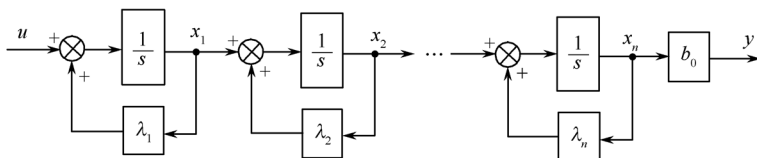


图 1-20 式(1-134)系统的串联实现

选每个积分器的输出为系统状态变量,则由图 1-20 可写出系统状态方程及输出方程分别为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + u \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + x_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = \lambda_n x_n + x_{n-1} \\ y = b_0 x_n \end{cases}$$

则向量-矩阵形式的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$$

式中,  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ 1 & \lambda_2 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \lambda_{n-1} \\ 0 & & & 1 & \lambda_n \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad b_0]$ 。

### 3. 系统实现的并联法

并联法的基本思路是采用部分分式法将传递函数  $G(s)$  分解成若干个一阶、二阶传递函数之和,分别对各个一阶、二阶子系统模拟,再将它们并联连接得系统模拟结构图,由系统模拟结构图即可写出状态空间表达式。

设  $n$  阶严格有理真分式传递函数为

$$G(s) = \frac{M(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_{n-1})(s+p_n)} \quad (1-135)$$

式中,  $-p_i$  为系统极点 ( $i=1,2,\cdots,n$ )。可采用部分分式法将上式展成部分分式之和,为简单起见,本节仅限于讨论  $-p_i$  为实极点 ( $i=1,2,\cdots,n$ ) 的情况,并分  $G(s)$  的  $n$  个极点互异和  $G(s)$  含有重极点两种情况进行讨论。

(1) 传递函数  $G(s)$  只含单实极点时

传递函数如式(1-135),则系统特征方程为

$$D(s) = (s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_{n-1})(s+p_n) = 0 \quad (1-136)$$

式中,  $-p_i$  ( $i=1,2,\cdots,n$ ) 为系统的互异实极点,则传递函数  $G(s)$  可展成部分分式之和

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{c_1}{(s+p_1)} + \frac{c_2}{(s+p_2)} + \cdots + \frac{c_n}{(s+p_n)} \quad (1-137)$$

式中,  $c_i$  ( $i=1,2,\cdots,n$ ) 为待定系数,可由留数法求出,即

$$c_i = \lim_{s \rightarrow -p_i} (s+p_i)G(s), \quad i=1,2,\cdots,n \quad (1-138)$$

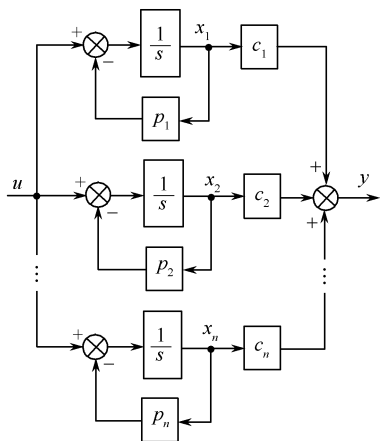


图 1-21 式(1-135)所示传递函数  $G(s)$  只含单实极点时的并联实现(对角标准型)

式(1-137)表明,式(1-135)所示系统当其仅含单实极点时,可看成由  $n$  个一阶子系统并联而成,对应的模拟结构图如图 1-21 所示。选各积分器的输出为系统状态变量,则由图 1-21 可写出式(1-135)所示系统当其仅含单实极点时的状态空间表达式

$$\begin{cases} \dot{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1-139)$$

式(1-139)为对角线标准型状态空间表达式,其系统矩阵  $\mathbf{A}$  为对角线标准型,对角线上各元素就是系统的特征值,即传递函数的极点。

**【例 1-17】** 设系统传递函数为  $G(s) = \frac{s^2 + 3s + 2}{s(s^2 + 7s + 12)}$ , 试应用并联法求其状态空间表达式。

**解** 由系统特征方程

$$D(s) = s(s^2 + 7s + 12) = 0$$

求得系统特征值为  $0, -3, -4$ , 则可将系统传递函数分解成部分分式之和, 即

$$G(s) = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s+3} + \frac{c_3}{s+4}$$

式中,  $c_1 = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \frac{1}{6}$ ,  $c_2 = \lim_{s \rightarrow -3} (s+3)G(s) = -\frac{2}{3}$ ,  $c_3 = \lim_{s \rightarrow -4} (s+4)G(s) = \frac{3}{2}$ 。

则根据式(1-139), 系统对角线标准型状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

对应的系统状态变量图如图 1-22 所示。

**【例 1-18】** 设系统传递函数为  $\bar{G}(s) = \frac{s^2 + 6s + 8}{s^2 + 4s + 3}$ , 试求对角线标准型状态空间表达式。

**解**  $\bar{G}(s) = \frac{s^2 + 6s + 8}{s^2 + 4s + 3} = \frac{2s + 5}{s^2 + 4s + 3} + 1 = G(s) + 1$ , 则其状态空间实现中的直接传递矩阵  $\mathbf{D} = 1$ 。

$$\text{又 } G(s) = \frac{2s + 5}{s^2 + 4s + 3} = \frac{2s + 5}{(s+1)(s+3)} = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{s+3}$$

式中,  $c_1 = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)G(s) = \frac{3}{2}$ ,  $c_2 = \lim_{s \rightarrow -3} (s+3)G(s) = \frac{1}{2}$ 。则系统对角线标准型状态空间表达

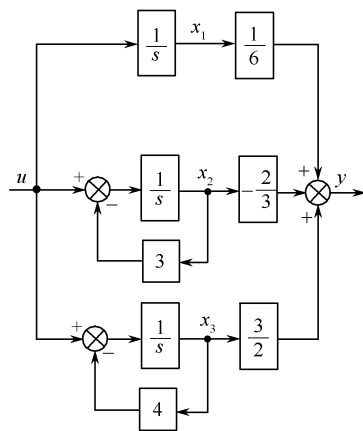


图 1-22 系统状态变量图

式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + u \end{cases}$$

(2) 传递函数  $G(s)$  含重实极点时

当式(1-135)传递函数  $G(s)$  含重实极点时,不失一般性,假设

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{M(s)}{(s+p_1)^q (s+p_{q+1}) \cdots (s+p_n)} \quad (1-140)$$

式中,  $-p_1$  为  $q$  重实极点,其他  $-p_i (i=q+1, q+2, \cdots, n)$  为单实极点。

则  $G(s)$  可以分解为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{c_{11}}{(s+p_1)^q} + \frac{c_{12}}{(s+p_1)^{q-1}} + \cdots + \frac{c_{1q}}{s+p_1} + \frac{c_{q+1}}{s+p_{q+1}} + \cdots + \frac{c_n}{(s+p_n)} \quad (1-141)$$

其中,  $q$  重极点  $-p_1$  所对应的部分分式系数  $c_{1j} (j=1, 2, \cdots, q)$  按式(1-142)计算,即

$$c_{1j} = \lim_{s \rightarrow -p_1} \frac{1}{(j-1)!} \frac{d^{(j-1)}}{ds^{(j-1)}} [(s+p_1)^q G(s)] \quad (1-142)$$

对于单极点  $-p_i (i=q+1, q+2, \cdots, n)$ , 对应的部分分式的系数则按式(1-143)计算,即

$$c_i = \lim_{s \rightarrow -p_i} (s+p_i) G(s) \quad (1-143)$$

由式(1-141)选择系统状态变量的拉氏变换为

$$\begin{cases} X_1(s) = \frac{1}{(s+p_1)^q} U(s) \\ X_2(s) = \frac{1}{(s+p_1)^{q-1}} U(s) \\ \vdots \\ X_q(s) = \frac{1}{s+p_1} U(s) \\ X_{q+1}(s) = \frac{1}{s+p_{q+1}} U(s) \\ \vdots \\ X_n(s) = \frac{1}{s+p_n} U(s) \end{cases} \quad (1-144)$$

由式(1-144)得

$$\begin{cases} X_1(s) = \frac{1}{s+p_1} X_2(s) \\ X_2(s) = \frac{1}{s+p_1} X_3(s) \\ \vdots \\ X_q(s) = \frac{1}{s+p_1} U(s) \\ X_{q+1}(s) = \frac{1}{s+p_{q+1}} U(s) \\ \vdots \\ X_n(s) = \frac{1}{s+p_n} U(s) \end{cases} \quad (1-145)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} sX_1(s) = -p_1X_1(s) + X_2(s) \\ sX_2(s) = -p_1X_2(s) + X_3(s) \\ \vdots \\ sX_q(s) = -p_1X_q(s) + U(s) \\ sX_{q+1}(s) = -p_{q+1}X_{q+1}(s) + U(s) \\ \vdots \\ sX_n(s) = -p_nX_n(s) + U(s) \end{array} \right. \quad (1-146)$$
$$Y(s) = c_{11}X_1(s) + c_{12}X_2(s) + \cdots + c_{1a}X_a(s) + c_{a+1}X_{a+1}(s) + \cdots + c_nX_n(s) \quad (1-147)$$
$$y=c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1q}x_q+c_{a+1}x_{a+1}+\cdots+c_nx_n \quad (1-148)$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -p_1 x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -p_1 x_2 + x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{q-1} = -p_1 x_{q-1} + x_q \\ \dot{x}_q = -p_1 x_q + u \\ \dot{x}_{q+1} = -p_{q+1} x_{q+1} + u \\ \vdots \\ \dot{x}_n = -p_n x_n + u \end{array} \right. \quad (1-149)$$
$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{q-1} \\ \dot{x}_q \\ \hdashline \dot{x}_{q+1} \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{ccccccccc} -p_1 & 1 & & & & & & & \mathbf{0} \\ & -p_1 & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & & -p_1 & 1 & & & & \\ \mathbf{0} & & & & -p_1 & & & & \\ \hdashline \mathbf{0} & & & & & -p_{q+1} & & \ddots & \\ & & & & & & & & -p_n \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{q-1} \\ x_q \\ \hdashline x_{q+1} \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \hdashline 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right] u$$

• 44 •

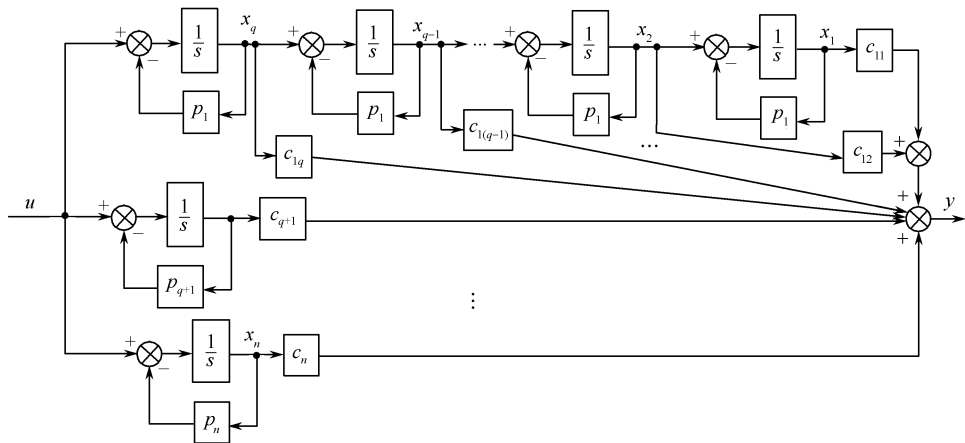


图 1-23 有重实极点的式(1-140)系统并联型模拟结构图(约当标准型实现)

以上结果可以推广到一般情况。设  $n$  阶严格有理真分式传递函数  $G(s)$  中,  $-p_1, -p_2, \dots, -p_k$  为单极点,  $-p_{k+1}$  为  $l_1$  重极点,  $\dots, -p_{k+m}$  为  $l_m$  重极点, 且  $k+l_1+\dots+l_m=n$ , 则可直接写出  $G(s)$  的约当标准型状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_k \\ \hline \dot{x}_{k+1} \\ \vdots \\ \dot{x}_{k+l_1-1} \\ \hline \dot{x}_{k+l_1} \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-l_m+1} \\ \hline \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -p_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & -p_k \end{matrix}} & & \\ & \boxed{\begin{matrix} -p_{k+1} & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -p_{k+1} & 1 \\ & & & -p_{k+1} \end{matrix}} & 0 \\ 0 & & \boxed{\begin{matrix} -p_{k+m} & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -p_{k+m} & 1 \\ & & & -p_{k+m} \end{matrix}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ \hline x_{k+1} \\ \vdots \\ x_{k+l_1-1} \\ \hline x_{k+l_1} \\ \vdots \\ x_{n-l_m+1} \\ \hline \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [c_1 \quad \dots \quad c_k \quad \vdots \quad c_{k+1,1} \quad \dots \quad c_{k+1,l_1-1} \quad c_{k+1,l_1} \quad \vdots \quad \dots \quad c_{k+m,1} \quad \dots \quad c_{k+m,l_m-1} \quad c_{k+m,l_m}] \mathbf{x}$$

**【例 1-19】** 求传递函数  $G(s) = \frac{4s^2+10s+5}{s^3+5s^2+8s+4}$  的并联实现。

解 
$$G(s) = \frac{4s^2+10s+5}{s^3+5s^2+8s+4} = \frac{4s^2+10s+5}{(s+2)^2(s+1)} = \frac{c_{11}}{(s+2)^2} + \frac{c_{12}}{s+2} + \frac{c_3}{s+1}$$

式中  $c_{11} = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2)^2 G(s) = -1$

$$c_{12} = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{s \rightarrow -2} \frac{d^{(2-1)}}{ds^{(2-1)}} [(s+2)^2 G(s)] = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{d}{ds} \left[ \frac{4s^2+10s+5}{(s+1)} \right] = 5$$

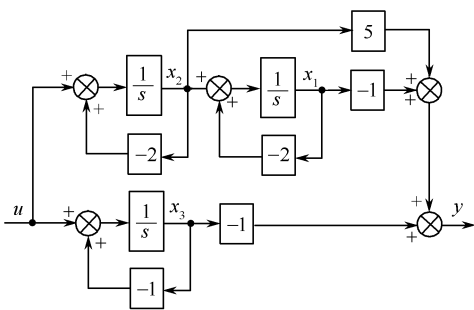


图 1-24 例 1-19 系统的状态变量图

$$c_3 = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)G(s) = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{4s^2 + 10s + 5}{(s+2)^2} = -1$$

则系统并联实现的状态空间表达式为约当标准型,即

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

系统并联实现的状态变量图如图 1-24 所示。

### 1.3.4 系统的传递函数阵

#### 1. 由系统的状态空间表达式求传递函数阵

1.3.3 节介绍了由传递函数求状态空间表达式的问题,即系统实现问题,可以看出这是一个比较复杂的问题,因为实现具有非唯一性。但实现的逆问题,即从系统状态空间表达式求其传递函数(阵)却较为简单且求解结果是唯一的。

设  $r$  维输入、 $m$  维输出的多输入多输出(MIMO)线性定常系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases} \quad (1-151)$$

式中,  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}$  分别为  $n \times 1, m \times 1, r \times 1$  维的列向量,  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$  分别为  $n \times n, n \times r, m \times n, m \times r$  维的矩阵。

令系统初始条件为零,对式(1-151)中的状态方程和输出方程两端进行拉氏变换,有

$$\begin{cases} s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \\ \mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \end{cases} \quad (1-152)$$

所以

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (1-153)$$

$$\mathbf{Y}(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}] \mathbf{U}(s) = \mathbf{G}(s) \mathbf{U}(s) \quad (1-154)$$

式中

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (1-155)$$

称为系统的传递函数矩阵,其是一个  $m \times r$  维矩阵,描述了  $r$  维输入向量  $\mathbf{U}(s)$  和  $m$  维输出向量  $\mathbf{Y}(s)$  间的传递关系,即

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1r}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdots & G_{2r}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{m1}(s) & G_{m2}(s) & \cdots & G_{mr}(s) \end{bmatrix} \quad (1-156)$$

式中,  $G_{ik}(s) (i=1, 2, \dots, m; k=1, 2, \dots, r)$  为一标量传递函数,其表示系统的第  $k$  个输入量对第  $i$  个输出量的传递作用。

当系统为单输入单输出(SISO)系统时,按式(1-155)求出的  $G(s)$  则为标量传递函数,即

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \\ &= \mathbf{C} \frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|} \mathbf{B} + \mathbf{D} = \frac{\mathbf{C}[\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})]\mathbf{B} + \mathbf{D}|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|} \end{aligned} \quad (1-157)$$

而在经典控制理论中,SISO 系统的传递函数  $G(s)$  具有如下一般形式



$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \quad (1-158)$$

比较式(1-157)和式(1-158)可知,传递函数的分子多项式为多项式  $\mathbf{C}[\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B}] + \mathbf{D}|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|$ ;传递函数的分母多项式即为系统矩阵  $\mathbf{A}$  的特征多项式,故传递函数的极点即为矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值。

前已指出,描述同一系统的状态空间表达式可作各种线性非奇异变换,不是唯一的。但是用不同的状态向量描述系统,并不影响其传递函数阵,同一系统的传递函数阵是唯一的,即系统的传递函数阵对于线性非奇异变换具有不变性,这一点可证明如下。

设给定系统在状态向量  $\mathbf{x}$  下的状态空间表达式如式(1-151),其传递函数阵为式(1-155)。若引入式(1-76)所示的线性非奇异变换,即

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}} \quad \text{或} \quad \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$$

则根据式(1-78),采用状态向量  $\bar{\mathbf{x}}$  描述系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{D}}\mathbf{u} \end{cases} \quad (1-159)$$

式中

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}, \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}, \bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \quad (1-160)$$

则对应式(1-159)的传递函数阵  $\bar{\mathbf{G}}(s)$  应为

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{G}}(s) &= \bar{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1}\bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{D}} \\ &= \mathbf{C}\mathbf{T}(s\mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \\ &= \mathbf{C}\mathbf{T}(\mathbf{T}^{-1}s\mathbf{I}\mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \\ &= \mathbf{C}\mathbf{T}[\mathbf{T}^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{T}]^{-1}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \\ &= \mathbf{C}\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \\ &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathbf{G}(s) \end{aligned}$$

证毕。

【例 1-20】 设系统的状态方程和输出方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -5x_1 - 3x_2 - 2x_3 + u \\ y = \frac{3}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

求系统的传递函数。

解 首先将状态方程和输出方程用向量-矩阵形式表示,即

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

因为

$$\begin{aligned}
 [s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1} &= \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 5 & 3 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\text{adj}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}{|s\mathbf{I}-\mathbf{A}|} \\
 &= \frac{1}{s^3+2s^2+3s+5} \begin{bmatrix} s^2+2s+3 & s+2 & 1 \\ -5 & s(s+2) & s \\ -5s & -(3s+5) & s^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

故系统传递函数为

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}{s^3+2s^2+3s+5} \begin{bmatrix} s^2+2s+3 & s+2 & 1 \\ -5 & s(s+2) & s \\ -5s & -(3s+5) & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}{s^3+2s^2+3s+5} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \end{bmatrix} = \frac{\frac{1}{2}s^2+s+\frac{3}{2}}{s^3+2s^2+3s+5} = \frac{s^2+2s+3}{2s^3+4s^2+6s+10}
 \end{aligned}$$

实际上本题给出的状态空间表达式为能控标准型,根据式(1-127)所揭示的单变量系统能控标准型系数矩阵  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{C}$  与传递函数分母、分子多项式系数的对应关系,可直接写出系统传递函数为

$$G(s) = \frac{\frac{1}{2}s^2+s+\frac{3}{2}}{s^3+2s^2+3s+5}$$

**【例 1-21】** 设系统的状态方程、输出方程分别为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

试求系统的传递函数矩阵。

解

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

系统的传递矩阵为

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G}(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s+4}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{s+4}{s+2} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{2(s-2)}{(s+1)(s+2)} & \frac{s^2+5s+2}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

此传递函数矩阵有 6 个元素,每个都是一个传递函数。

## 2. 组合系统的传递函数阵

实际的控制系统,一般是由多个子系统以串联、并联或反馈连接的方式组合而成的组合系统。为简单起见,下面仅以两个线性定常子系统作各种连接为例讨论在已知各个子系统的状态空间表达式和传递函数阵时,如何求取组合后的整个系统的状态空间表达式和传递函数阵。

设子系统  $\Sigma_1(A_1, B_1, C_1, D_1)$  为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1 u_1 \\ \mathbf{y}_1 = \mathbf{C}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{D}_1 u_1 \end{cases} \quad (1-161)$$

其传递函数阵为

$$\mathbf{G}_1(s) = \mathbf{C}_1 (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{B}_1 + \mathbf{D}_1$$

另一个子系统  $\Sigma_2(A_2, B_2, C_2, D_2)$  为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2 u_2 \\ \mathbf{y}_2 = \mathbf{C}_2 \mathbf{x}_2 + \mathbf{D}_2 u_2 \end{cases} \quad (1-162)$$

其传递函数阵为

$$\mathbf{G}_2(s) = \mathbf{C}_2 (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_2)^{-1} \mathbf{B}_2 + \mathbf{D}_2$$

### (1) 并联连接

如图 1-25 所示,子系统  $\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$  并联,设  $\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$  输入、输出维数相同。

由图 1-25 可知,  $u_1 = u_2 = u$ ,  $y = y_1 + y_2$ , 则据式(1-161)和式(1-162)得并联后系统的状态空间表达式为

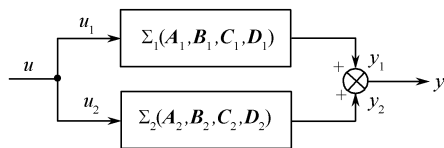


图 1-25 子系统并联

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} u \\ \mathbf{y} = [\mathbf{C}_1 \quad \vdots \quad \mathbf{C}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + (\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2) u \end{cases} \quad (1-163)$$

其传递函数阵

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \\ &= [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2] \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & s\mathbf{I} - \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} + [\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2] \\ &= \mathbf{C}_1 (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{B}_1 + \mathbf{D}_1 + \mathbf{C}_2 (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_2)^{-1} \mathbf{B}_2 + \mathbf{D}_2 \\ &= \mathbf{G}_1(s) + \mathbf{G}_2(s) \end{aligned} \quad (1-164)$$

## (2) 串联连接

如图 1-26 所示,子系统  $\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$  串联。由图 1-26 可知,子系统  $\Sigma_1$  的输出为子系统  $\Sigma_2$  的输入,而  $\Sigma_2$  的输出为串联后系统的输出,即  $u_1 = u, y = y_2$ ,则据式(1-161)和式(1-162)得串联后组合系统的状态空间表达式为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_1 \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_2 \mathbf{x}_2 + \mathbf{D}_2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{C}_2 \mathbf{x}_2 + \mathbf{D}_2 (\mathbf{C}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{D}_1 \mathbf{u}) \\ &= \mathbf{D}_2 \mathbf{C}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{C}_2 \mathbf{x}_2 + \mathbf{D}_2 \mathbf{D}_1 \mathbf{u}\end{aligned}$$

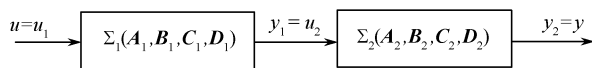


图 1-26 子系统串联

则向量-矩阵形式的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = [\mathbf{D}_2 \mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \mathbf{D}_2 \mathbf{D}_1 \mathbf{u} \end{cases} \quad (1-165)$$

又

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}(s) &= \mathbf{Y}_2(s) = \mathbf{G}_2(s) \mathbf{U}_2(s) = \mathbf{G}_2(s) \mathbf{Y}_1(s) = \mathbf{G}_2(s) \mathbf{G}_1(s) \mathbf{U}_1(s) \\ &= \mathbf{G}_2(s) \mathbf{G}_1(s) \mathbf{U}(s) = \mathbf{G}(s) \mathbf{U}(s)\end{aligned}$$

则串联后组合系统的传递函数阵为

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{G}_2(s) \mathbf{G}_1(s) \quad (1-166)$$

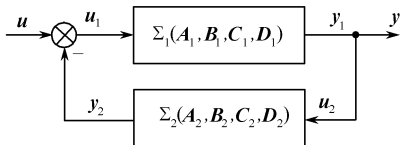


图 1-27 反馈连接

可见,两个子系统串联系统的传递函数阵为子系统传递函数阵之乘积,但应注意,传递函数阵相乘的顺序不能颠倒。

## (3) 反馈连接

具有输出反馈的系统如图 1-27 所示。由图 1-27 可得

$u_1 = u - y_2, u_2 = y, y = y_1$ 。设  $\mathbf{D}_1 = \mathbf{0}, \mathbf{D}_2 = \mathbf{0}$ , 则反馈连接后

闭环系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1 \mathbf{u} - \mathbf{B}_1 \mathbf{C}_2 \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_1 \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_1 \mathbf{x}_1 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & -\mathbf{B}_1 \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1-167)$$

又由图 1-27 得

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}_1(s) \mathbf{U}_1(s) \quad (1-168)$$

$$\mathbf{U}_1(s) = \mathbf{U}(s) - \mathbf{G}_2(s) \mathbf{Y}(s) \quad (1-169)$$

将式(1-169)代入式(1-168)得

$$Y(s) = G_1(s)U(s) - G_1(s)G_2(s)Y(s)$$

整理上式,得

$$[I + G_1(s)G_2(s)]Y(s) = G_1(s)U(s)$$

即

$$Y(s) = [I + G_1(s)G_2(s)]^{-1}G_1(s)U(s)$$

则图 1-27 所示反馈连接闭环系统的传递函数阵为

$$G(s) = [I + G_1(s)G_2(s)]^{-1}G_1(s) \quad (1-170)$$

其描述了  $U(s)$  至  $Y(s)$  之间的传递关系。

若将式(1-168)代入式(1-169),则得

$$U_1(s) = U(s) - G_2(s)G_1(s)U_1(s)$$

即

$$U_1(s) = [I + G_2(s)G_1(s)]^{-1}U(s)$$

将上式代入式(1-168)得

$$Y(s) = G_1(s)[I + G_2(s)G_1(s)]^{-1}U(s)$$

则闭环系统传递函数阵的另一表达式为

$$G(s) = G_1(s)[I + G_2(s)G_1(s)]^{-1} \quad (1-171)$$

其与式(1-170)等价。

## 1.4 离散系统的状态空间描述

离散(时间)系统是系统的输入、输出和状态变量只在某些离散时刻取值的系统,与其相关的外部数学描述方法有差分方程和系统脉冲传递函数。同样,对于离散系统也可采用状态空间表达式描述,在形式上与连续系统的状态空间描述方法完全类似。本节阐述离散系统的状态空间描述,以及从系统差分方程或脉冲传递函数求离散状态空间表达式的问题即 SISO 离散系统的实现问题。同样由于状态变量的选择不是唯一的,离散系统的实现也是非唯一的。

### 1.4.1 离散系统的状态空间表达式

线性离散系统的状态空间表达式的一般形式为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}(k)\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k) \end{cases} \quad (1-172)$$

式中,  $\mathbf{x}(k)$  为系统的  $n$  维状态向量;  $\mathbf{u}(k)$  为系统的  $r$  维输入向量;  $\mathbf{y}(k)$  为系统的  $m$  维输出向量;  $\mathbf{G}(k)$  为  $n \times n$  维线性离散系统的系统矩阵;  $\mathbf{H}(k)$  为  $n \times r$  维线性离散系统的输入矩阵;  $\mathbf{C}(k)$  为  $m \times n$  维线性离散系统的输出矩阵;  $\mathbf{D}(k)$  为  $m \times r$  维线性离散系统的输入/输出关联矩阵(或直接传递矩阵)。

注意:以上各向量和矩阵均是由  $t = kT$  时刻所确定的,其中,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ;  $T$  为采样周期。上式中  $\mathbf{x}(k)$  为  $\mathbf{x}(kT)$  的缩略形式,  $\mathbf{u}(k)$ 、 $\mathbf{y}(k)$  等也为缩略形式。

由式(1-172)可见,离散系统的状态方程描述了  $(k+1)T$  时刻的状态与  $kT$  时刻的状态及输入量之间的关系,其输出方程描述了  $kT$  时刻的输出量与  $kT$  时刻的状态及输入量之间的关系。

与连续系统类似,线性离散系统状态空间表达式的方块图如图 1-28 所示。图中,方块  $T$  为单位延迟器,它表示将输入的信号延迟一个节拍,即如果其输入为  $\mathbf{x}(k+1)$ ,那么其输出为  $\mathbf{x}(k)$ 。

对线性定常离散系统而言,  $\mathbf{G}(k)$ 、 $\mathbf{H}(k)$ 、 $\mathbf{C}(k)$ 、 $\mathbf{D}(k)$  均为常数矩阵,其状态空间表达式为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{cases} \quad (1-173)$$

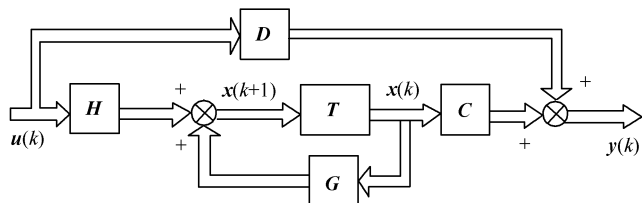


图 1-28 线性离散系统的方块图

本节主要针对单变量线性定常离散系统进行分析讨论。

### 1.4.2 差分方程化为状态空间表达式

连续时间系统中由描述输入、输出关系的微分方程或传递函数建立状态空间表达式的方法完全适用于离散时间系统。化标量差分方程为离散状态空间表达式与化标量微分方程为连续状态空间表达式类似,可分两种情况讨论。

#### 1. 差分方程不含输入函数的高阶差分

此时标量差分方程具有如下形式

$$y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \cdots + a_{n-1} y(k+1) + a_n y(k) = bu(k) \quad (1-174)$$

选取各采样时刻的  $y(k), y(k+1), \cdots, y(k+n-1)$  为  $n$  个状态变量,即令

$$\begin{cases} x_1(k) = y(k) \\ x_2(k) = y(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k) = y(k+n-1) \end{cases} \quad (1-175)$$

由式(1-174)和式(1-175)得一阶差分方程组,即

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_3(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) = x_n(k) \\ x_n(k+1) = y(k+n) = -a_n x_1(k) - a_{n-1} x_2(k) - \cdots - a_1 x_n(k) + bu(k) \end{cases} \quad (1-176)$$

又输出方程为

$$y(k) = x_1(k) \quad (1-177)$$

根据式(1-176)和式(1-177)可写出向量-矩阵形式的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1-178)$$

#### 2. 差分方程包含输入函数的高阶差分

此时描述单输入单输出线性定常离散时间系统的差分方程为

$$\begin{aligned} & y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \cdots + a_{n-1} y(k+1) + a_n y(k) \\ & = b_0 u(k+n) + b_1 u(k+n-1) + \cdots + b_{n-1} u(k+1) + b_n u(k) \end{aligned} \quad (1-179)$$

与连续系统微分方程中包含输入函数导数项时选择状态变量类似,可选取如下一组状态变量

$$\begin{cases} x_1(k) = y(k) - \beta_0 u(k) \\ x_2(k) = y(k+1) - \beta_0 u(k+1) - \beta_1 u(k) \\ \vdots \\ x_n(k) = y(k+n-1) - \beta_0 u(k+n-1) - \beta_1 u(k+n-2) - \cdots - \beta_{n-1} u(k) \end{cases} \quad (1-180)$$

式中,待定系数  $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1}$  由下式确定

$$\begin{cases} \beta_0 = b_0 \\ \beta_1 = b_1 - a_1 \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} = b_{n-1} - a_1 \beta_{n-2} - a_2 \beta_{n-3} - \cdots - a_{n-1} \beta_0 \end{cases} \quad (1-181)$$

$$\text{令} \quad \beta_n = b_n - a_1 \beta_{n-1} - a_2 \beta_{n-2} - \cdots - a_n \beta_0 \quad (1-182)$$

则由式(1-180)、式(1-181)和式(1-182)得离散系统式(1-179)的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \beta_0 u(k) \end{cases} \quad (1-183)$$

**【例 1-22】** 设一个 3 阶差分方程为

$$y(k+3) + 5y(k+2) + 7y(k+1) + 3y(k) = u(k+1) + 2u(k)$$

求相应的离散状态方程和输出方程。

**解** 差分方程的系数为

$$a_1 = 5, a_2 = 7, a_3 = 3, b_0 = 0, b_1 = 0, b_2 = 1, b_3 = 2$$

由式(1-181)和式(1-182)可求得相应的系数  $\beta_i$  为

$$\beta_0 = 0, \beta_1 = 0, \beta_2 = 1, \beta_3 = -3$$

则根据式(1-183)得离散状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -7 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} \end{cases}$$

对应离散系统状态空间表达式的结构图如图 1-29 所示,其中  $z^{-1}$  为单位延迟环节。

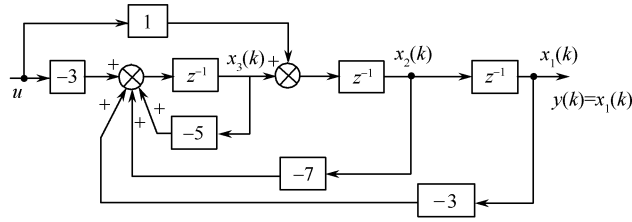


图 1-29 例 1-22 离散系统的结构图

### 1.4.3 由脉冲传递函数化为状态空间表达式

设线性定常离散系统的脉冲传递函数为

$$\bar{G}(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \cdots + b_{n-1} z + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n} + d = G(z) + d \quad (1-184)$$

式中,  $Y(z)$  为输出的  $Z$  变换;  $U(z)$  为输入的  $Z$  变换。根据式(1-184)可写出输出量与输入量之间的差分方程,然后利用 1.4.2 节所述方法转换为离散状态空间表达式。实际上,式(1-184)和线性定常连续系统传递函数式(1-124)形式类似,故也可仿照 1.3.3 节中连续系统的实现方法将脉冲传递函数化为离散状态空间表达式。

例如,可仿照 1.3.3 节连续系统实现的级联分解法推导式(1-184)对应的离散状态空间表达式。将式(1-184)改写为

$$\bar{G}(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_{n-1} z^{-(n-1)} + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{n-1} z^{-(n-1)} + a_n z^{-n}} + d \quad (1-185)$$

则有

$$Y(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_{n-1} z^{-(n-1)} + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{n-1} z^{-(n-1)} + a_n z^{-n}} U(z) + d U(z) \quad (1-186)$$

令

$$\tilde{Y}(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_{n-1} z^{-(n-1)} + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{n-1} z^{-(n-1)} + a_n z^{-n}} U(z) \quad (1-187)$$

则式(1-186)成为

$$Y(z) = \tilde{Y}(z) + d U(z) \quad (1-188)$$

引入中间变量  $M(z)$ , 将式(1-187)改写为

$$\frac{\tilde{Y}(z)}{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_{n-1} z^{-(n-1)} + b_n z^{-n}} = \frac{U(z)}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{n-1} z^{-(n-1)} + a_n z^{-n}} \triangleq M(z) \quad (1-189)$$

由式(1-189)得

$$M(z) = U(z) - a_1 z^{-1} M(z) - \cdots - a_{n-1} z^{-(n-1)} M(z) - a_n z^{-n} M(z) \quad (1-190)$$

$$\tilde{Y}(z) = b_1 z^{-1} M(z) + b_2 z^{-2} M(z) + \cdots + b_{n-1} z^{-(n-1)} M(z) + b_n z^{-n} M(z) \quad (1-191)$$

选取状态变量的  $Z$  变换为

$$\begin{cases} X_1(z) = z^{-n} M(z) \\ X_2(z) = z^{-n+1} M(z) \\ \vdots \\ X_{n-1}(z) = z^{-2} M(z) \\ X_n(z) = z^{-1} M(z) \end{cases} \quad (1-192)$$



由式(1-192)得

$$\begin{cases} zX_1(z) = X_2(z) \\ zX_2(z) = X_3(z) \\ \vdots \\ zX_{n-1}(z) = X_n(z) \end{cases} \quad (1-193)$$

对式(1-193)作  $Z$  反变换得  $(n-1)$  个一阶差分方程

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_3(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) = x_n(k) \end{cases} \quad (1-194)$$

由式(1-192)有

$$zX_n(z) = M(z) \quad (1-195)$$

将式(1-190)和式(1-192)代入式(1-195)得

$$zX_n(z) = -a_1X_n(z) - \cdots - a_{n-1}X_2(z) - a_nX_1(z) + U(z) \quad (1-196)$$

对式(1-196)作  $Z$  反变换得一阶差分方程

$$x_n(k+1) = -a_1x_n(k) - \cdots - a_{n-1}x_2(k) - a_nx_1(k) + U(k) \quad (1-197)$$

将式(1-192)代入式(1-191)得

$$\tilde{Y}(z) = b_1X_n(z) + b_2X_{n-1}(z) + \cdots + b_{n-1}X_2(z) + b_nX_1(z) \quad (1-198)$$

将式(1-198)代入式(1-188)并作  $Z$  反变换得

$$y(k) = b_1x_n(k) + b_2x_{n-1}(k) + \cdots + b_{n-1}x_2(k) + b_nx_1(k) + du(k) \quad (1-199)$$

由式(1-194)、式(1-197)和式(1-199)得式(1-184)的离散状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ \\ y = [b_n \quad b_{n-1} \quad \cdots \quad b_2 \quad b_1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + du(k) \end{cases} \quad (1-200)$$

式(1-200)为式(1-184)脉冲传递函数的能控标准型实现。

又例如，也可仿照 1.3.3 节连续系统并联实现的方法根据脉冲传递函数建立离散状态空间表达式，同样可根据脉冲传递函数是否含重极点分两种情况讨论。若脉冲传递函数  $\bar{G}(z)$  只含单

实极点即其具有互异的实极点  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , 则  $\bar{G}(z)$  可应用部分分式法分解为

$$\bar{G}(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{c_1}{z-z_1} + \frac{c_2}{z-z_2} + \dots + \frac{c_n}{z-z_n} + d \quad (1-201)$$

式中

$$c_i = \lim_{z \rightarrow z_i} \bar{G}(z)(z-z_i), i=1, 2, \dots, n$$

取离散状态变量的  $Z$  变换为

$$X_i(z) = \frac{1}{z-z_i} U(z), i=1, 2, \dots, n \quad (1-202)$$

则

$$zX_i(z) = z_i X_i(z) + U(z), i=1, 2, \dots, n \quad (1-203)$$

$$Y(z) = c_1 X_1(z) + c_2 X_2(z) + \dots + c_n X_n(z) + dU(z) \quad (1-204)$$

对式(1-203)和式(1-204)作  $Z$  反变换, 则得离散状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 & & 0 \\ & z_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & z_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + du(k) \end{cases} \quad (1-205)$$

式(1-205)为对角标准型实现。

对于脉冲传递函数  $\bar{G}(z)$  含重实极点的情况, 也可仿照连续系统传递函数含重实极点时的约当标准型实现方法进行处理, 本书不再赘述。

**【例 1-23】** 已知一离散系统的脉冲传递函数为

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0.368z + 0.264}{z^2 - 1.368z + 0.368}$$

试写出其对角标准型状态空间表达式。

**解** 将  $G(z)$  用部分分式展开为

$$G(z) = \frac{0.368z + 0.264}{z^2 - 1.368z + 0.368} = \frac{1}{z-1} - \frac{0.632}{z-0.368}$$

则

$$Y(z) = \frac{U(z)}{z-1} - \frac{0.632U(z)}{z-0.368}$$

由上式可以画出系统模拟结构图, 如图 1-30 所示, 在图上设置状态变量, 即得状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.368 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = [1 \quad -0.632] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \end{cases}$$

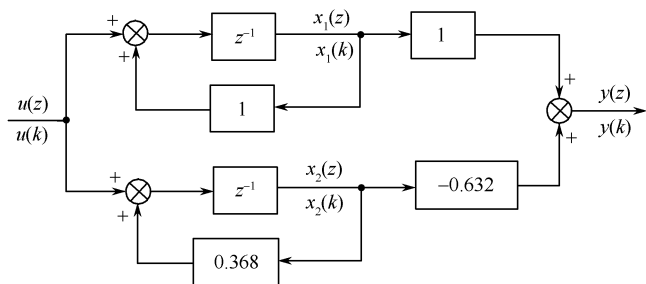


图 1-30 例 1-23 中系统状态变量图

#### 1.4.4 由离散系统状态空间表达式求脉冲传递函数矩阵

$r$  维输入、 $m$  维输出的多输入多输出 (MIMO) 线性定常离散系统的状态空间表达式如式(1-173), 即为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}u(k) \end{cases} \quad (1-206)$$

对上式进行  $Z$  变换, 得

$$\begin{cases} z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}(0) = \mathbf{G}\mathbf{X}(z) + \mathbf{H}U(z) \\ \mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}\mathbf{X}(z) + \mathbf{D}U(z) \end{cases} \quad (1-207)$$

令系统初始条件为零, 由式(1-207)得

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} \mathbf{H}U(z) \quad (1-208)$$

$$\mathbf{Y}(z) = [\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} \mathbf{H} + \mathbf{D}]U(z) = \mathbf{G}(z)U(z) \quad (1-209)$$

式中

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1} \mathbf{H} + \mathbf{D} \quad (1-210)$$

为系统的脉冲传递函数阵, 其是一个  $m \times r$  维矩阵, 表征了 MIMO 离散系统的动态特性。若为单输入单输出线性定常离散系统, 由式(1-210)求得的  $G(z)$  则为脉冲传递函数。

## 1.5 MATLAB 在系统数学模型变换中的应用

本节主要介绍基于 MATLAB 的线性定常系统 (LTI) 建模分析的常用命令函数。

### 1.5.1 系统的模型

#### 1. 传递函数模型

设单输入单输出 (SISO) 连续系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \quad (1-211)$$

在 MATLAB 中, 可用传递函数分子、分母多项式按  $s$  的降幂系数排列的行向量, 即

$$\text{num} = [b_1, b_2, \cdots, b_{n-1}, b_n]$$

$$\text{den} = [a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n]$$

描述式(1-211)所示传递函数  $G(s)$  的多项式模型。而由命令函数 `tf()` 则可建立系统的传递函数模型 TF, 其调用格式为

```
sys=tf(num,den)
```

其中,num、den 分别是传递函数分子、分母多项式系数行向量,且系数均按  $s$  的降幂排列。

【例 1-24】 已知系统传递函数为

$$G(s) = \frac{2s+9}{s^4+3s^3+2s^2+4s+6}$$

则可以利用程序 MATLAB Program 1\_1 将上述系统模型表示出来,并将其建立在 MATLAB 的工作空间(Workspace)中。

```
%MATLAB Program 1_1
num=[2 9];           %G(s)分子多项式按 s 的降幂系数排列的行向量
den=[1 3 2 4 6];      %G(s)分母多项式按 s 的降幂系数排列的行向量
G=tf(num,den)         %建立传递函数模型,存放于 G
```

执行 MATLAB Program 1\_1 后得到

```
Transfer function:
      2 s + 9
-----
s^4 + 3 s^3 + 2 s^2 + 4 s + 6
```

对 SISO 线性定常离散系统,其脉冲传递函数一般可表示为关于  $z$  的降幂多项式分式形式,即

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{c_m z^m + c_{m-1} z^{m-1} + \cdots + c_1 z + c_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \quad (1-212)$$

在 MATLAB 中,对于式(1-212)所示离散系统,同样可用 tf() 命令建立其脉冲传递函数模型,调用格式为

```
num=[c_m,c_{m-1},...,c_1,c_0];
den=[a_n,a_{n-1},...,a_1,a_0];
sys=tf(num,den,T_s)
```

其中, $T_s$ 为系统采样周期。

另外,系统的传递函数还可表示成零极点形式,即

$$G(s) = k \frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} \quad (1-213)$$

在 MATLAB 中,可用传递函数的零点向量、极点向量及增益,即

```
z=[z_1,z_2,...,z_m];
p=[p_1,p_2,...,p_n];
k=k;
```

描述式(1-213)所示传递函数  $G(s)$  的零极点模型。而由命令函数 zpk() 则可建立零极点模型 ZPK,其调用格式为

```
sys=zpk(z,p,k)
```

## 2. 状态空间模型

$r$  维输入、 $m$  维输出的 MIMO 线性定常系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases} \quad (1-214)$$

式中,  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}$  分别为  $n \times 1, m \times 1, r \times 1$  维的列向量,  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$  分别为  $n \times n, n \times r, m \times n, m \times r$  维的常数矩阵。

在 MATLAB 中, 只要按照矩阵输入方式建立式(1-214)系统相应的系数矩阵, 即

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= [a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}; a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}; \dots; a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nm}] \\ \mathbf{B} &= [b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1r}; b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2r}; \dots; b_{n1}, b_{n2}, \dots, b_{nr}] \\ \mathbf{C} &= [c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n}; c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2n}; \dots; c_{m1}, c_{m2}, \dots, c_{nm}] \\ \mathbf{D} &= [d_{11}, d_{12}, \dots, d_{1r}; d_{21}, d_{22}, \dots, d_{2r}; \dots; d_{m1}, d_{m2}, \dots, d_{mr}] \end{aligned}$$

即可描述式(1-214)系统的状态空间模型。而由命令函数 `ss()` 则可建立系统的状态空间模型 SS, 其调用格式为

$$\text{sys} = \text{ss}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$$

对线性定常离散系统

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{cases} \quad (1-215)$$

在按常数矩阵输入方式建立系数矩阵  $\mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$  后, 同样调用

$$\text{sys} = \text{ss}(\mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, T_s)$$

则可建立式(1-215)离散系统的状态空间模型。其中,  $T_s$  为系统采样周期。

### 3. 组合系统模型

MATLAB 提供了两个子系统 G1、G2 并联连接系统函数 `parallel()`、串联连接系统函数 `series()` 及反馈连接系统函数 `feedback()`, 由此可计算相应组合系统的模型, 其调用格式分别为

$$\begin{aligned} \text{sys} &= \text{parallel}(\text{G1}, \text{G2}) \\ \text{sys} &= \text{series}(\text{G1}, \text{G2}) \\ \text{sys} &= \text{feedback}(\text{G1}, \text{G2}) \end{aligned}$$

其中, G1、G2 为子系统 1、子系统 2 已建立的模型, 其可均为传递函数模型 TF, 也可均为状态空间模型 SS。

## 1.5.2 系统模型的转换

### 1. 状态空间表达式向传递函数形式的转换

MATLAB 提供了模型转换函数, 可以完成系统数学模型的相互转换, 利用 `ss2tf()` 函数可由系统状态空间表达式求其传递函数(阵)。对 SISO 系统, `ss2tf()` 的调用格式为

$$[\text{num}, \text{den}] = \text{ss2tf}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$$

执行以上语句, 可实现将描述为  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  的系统状态空间模型中各系数矩阵转换为传递函数模型中分子、分母多项式系数行向量 num、den。对多输入系统, `ss2tf()` 的调用格式为

$$[\text{num}, \text{den}] = \text{ss2tf}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \text{iu})$$

其中, iu 用于指定变换所使用的输入量, iu 默认则为单输入情况。

【例 1-25】 已知系统状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2.25 & -5 & -1.25 & -0.5 \\ 2.25 & -4.25 & -1.25 & -0.25 \\ 0.25 & -0.5 & -1.25 & -1 \\ 1.25 & -1.75 & -0.25 & -0.75 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \\ 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ y = [0 \quad 2 \quad 0 \quad 2] \mathbf{x} \end{cases}$$

试应用 MATLAB 求取系统的传递函数阵。

**解** 该系统为双输入单输出系统,因此其传递函数阵  $\mathbf{G}(s)$  为  $1 \times 2$  维向量,即

$$\mathbf{G}(s) = [G_1(s) \quad G_2(s)]$$

其中,  $G_1(s)$ 、 $G_2(s)$  分别为输出量  $y$  与输入量  $u_1$ 、 $u_2$  之间的传递函数。利用 ss2tf() 函数可以进行指定输入的状态方程向传递函数的转换。MATLAB Program 1\_2 为求解本题的程序。

```
%MATLAB Program 1_2
A=[2.25 -5 -1.25 -0.5;2.25 -4.25 -1.25 -0.25;
    0.25 -0.5 -1.25 -1;1.25 -1.75 -0.25 -0.75];
B=[4 6;2 4;2 2;0 2];
C=[0 2 0 2];
D=[0 0];
[num1,den1]=ss2tf(A,B,C,D,1) %指定第一输入信号  $u_1$  所对应的转换
G1=tf(num1,den1)
[num2,den2]=ss2tf(A,B,C,D,2) %指定第二输入信号  $u_2$  所对应的转换
G2=tf(num2,den2)
```

程序 MATLAB Program 1\_2 的运行结果为

```
num1 =
    0    4.0000    14.0000    22.0000    15.0000
den1 =
    1.0000    4.0000    6.2500    5.2500    2.2500
Transfer function:
      4 s^3 + 14 s^2 + 22 s + 15
-----
s^4 + 4 s^3 + 6.25 s^2 + 5.25 s + 2.25
num2 =
    0    12.0000    32.0000    37.0000    17.0000
den2 =
    1.0000    4.0000    6.2500    5.2500    2.2500
Transfer function:
      12 s^3 + 32 s^2 + 37 s + 17
-----
s^4 + 4 s^3 + 6.25 s^2 + 5.25 s + 2.25
```

由此得系统的传递函数阵为

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} G_1(s) & G_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4s^3 + 14s^2 + 22s + 15}{s^4 + 4s^3 + 6.25s^2 + 5.25s + 2.25} & \frac{12s^3 + 32s^2 + 37s + 17}{s^4 + 4s^3 + 6.25s^2 + 5.25s + 2.25} \end{bmatrix}$$

与 ss2tf() 类似,应用 MATLAB 函数 ss2zp() 可由系统状态空间表达式求其零极点模型的参数  $(\mathbf{z}, \mathbf{p}, k)$ 。对 SISO 系统, ss2zp() 的调用格式为

$$[\mathbf{z}, \mathbf{p}, k] = \text{ss2zp}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$$

而对多输入系统,其调用格式为

$$[\mathbf{z}, \mathbf{p}, k] = \text{ss2zp}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \text{iu})$$

## 2. 传递函数到状态空间表达式的变换

利用 MATLAB 函数 tf2ss()、zp2ss() 可分别由多项式形式、零极点形式的传递函数求其状态空间模型中的各系数矩阵。其调用格式分别为

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}] = \text{tf2ss}(\text{num}, \text{den})$$

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}] = \text{zp2ss}(\mathbf{z}, \mathbf{p}, k)$$

上面两条语句分别由已知的  $(\text{num}, \text{den})$ 、 $(\mathbf{z}, \mathbf{p}, k)$  经模型转换返回状态空间表达式中各系数矩阵  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ 。

**【例 1-26】** 已知系统传递函数为

$$G(s) = \frac{18s + 36}{s^3 + 40.4s^2 + 391s + 150}$$

应用 MATLAB 的模型转换函数求状态空间模型的系数矩阵。

**解** MATLAB Program 1\_3 为求解本题的程序。

```
%MATLAB Program 1_3
num=[18,36];
den=[1 40.4 391 150];
[A,B,C,D]=tf2ss(num,den)
```

程序 MATLAB Program 1\_3 的运行结果为

```
A=
    -40.4000    -391.0000    -150.0000
     1.0000         0         0
         0         1.0000         0

B=
     1
     0
     0

C=
     0     18     36

D=
     0
```

应该指出,函数 ss() 不仅可用于建立系统的状态空间模型 SS,而且可将任意 LTI 系统模型 sys(传递函数模型 TF、零极点模型 ZPK)转换为状态空间模型 SS,其调用格式为

```
SYS=ss(sys)
```

事实上, MATLAB 中建立 LTI 系统 3 种模型的 3 个函数 `tf()`、`zpk()` 及 `ss()` 均可用类似的调用格式实现由一种模型到另一种模型的转换。

### 1.5.3 系统的线性非奇异变换与标准型状态空间表达式

#### 1. 系统的线性非奇异变换

MATLAB 中函数 `ss2ss()` 可实现对系统的线性非奇异变换。其调用格式为

$$GT = \text{ss2ss}(G, T)$$

其中,  $G$ 、 $GT$  分别为变换前、后系统的状态空间模型,  $T$  为线性非奇异变换阵。或为

$$[At, Bt, Ct, Dt] = \text{ss2ss}(A, B, C, D, T)$$

其中,  $(A, B, C, D)$ 、 $(At, Bt, Ct, Dt) = (TAT^{-1}, TB, CT^{-1}, D)$  分别为变换前、后系统的状态空间模型的系数阵,  $T$  为线性非奇异变换阵。

【例 1-27】 已知系统状态空间表达式的系数阵为

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -4 & 2 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [0.5 \quad -0.4375 \quad 0.4375], D = 0$$

试应用 `ss2ss()` 函数进行系统的线性非奇异变换。

**解** 变换阵  $T$  只要保证其非奇异即可, 在此选择单位反对角阵作为变换阵。MATLAB Program 1\_4 为求解本题的程序。

```
%MATLAB Program 1_4
A=[10 -4 2;8 0 0;0 2 0];
B=[2;0;0];
C=[0.5 -0.4375 0.4375];
D=0;
G1=ss(A,B,C,D); %建立变换前原状态空间模型 G1
T=flipr(eye(3)); %构造线性非奇异变换阵 T 为单位反对角阵
GT=ss2ss(G1,T) %获得变换后状态空间模型 GT
```

程序 MATLAB Program 1\_4 运行结果略。

MATLAB 没有提供将一般状态空间表达式化为约当标准型的函数, 但可先利用其计算约当标准型函数 `jordan()` 求出化约当标准型的变换阵, 再利用函数 `ss2ss()` 得约当标准型。`jordan()` 的调用格式为

$$[T, J] = \text{jordan}(A)$$

执行以上语句, 可得到化  $A$  为约当标准型  $J$  的变换阵  $T$ , 即  $J = T^{-1}AT$ ,  $T$  由  $A$  的线性独立特征向量、广义特征向量为列向量构成。



【例 1-28】应用 MATLAB 求解例 1-11。

解 MATLAB Program 1\_5 为求解本题的程序。

```
%MATLAB Program 1_5
A=[0 1 0;0 0 1;2 3 0];
B=[0;0;1];
C=[1 0 0];
D=0;
G=ss(A,B,C,D);           %建立变换前状态空间模型
[T,J]=jordan(A);          %求化 A 为约当标准型的变换阵 T 及约当阵 J
GT=ss2ss(G,inv(T))        %状态空间模型变换,变换阵为 T-1
```

程序 MATLAB Program 1\_5 运行结果略。

## 2. 标准型状态空间表达式的实现

MATLAB 提供了标准型状态空间表达式的实现函数 `canon()`, 以得到 LTI 系统模型 `sys` 的标准型状态空间表达式的实现。其调用格式为

$$G1 = \text{canon}(\text{sys}, \text{type})$$

若 LTI 系统模型 `sys` 为对应状态向量  $\mathbf{x}$  的状态空间模型, 可应用函数 `canon()` 将其变换为在新的状态向量  $\bar{\mathbf{x}}$  下的标准型状态空间表达式, 其调用格式为

$$[G1, P] = \text{canon}(\text{sys}, \text{type})$$

其中, `sys` 为原系统状态空间模型,  $P$  是返回的线性非奇异状态变换阵, 满足  $\bar{\mathbf{x}} = P\mathbf{x}$  关系。或为

$$[A_t, B_t, C_t, D_t, P] = \text{canon}(A, B, C, D, \text{type})$$

其中,  $(A, B, C, D)$  为对应  $\mathbf{x}$  的原系统状态空间模型的系数阵,  $(A_t, B_t, C_t, D_t)$  则为对应新状态向量  $\bar{\mathbf{x}}$  (仍满足  $\bar{\mathbf{x}} = P\mathbf{x}$ ) 的标准型状态空间模型的系数阵。

以上函数 `canon()` 调用中的字符串 `type` 确定标准型类型。它可以是模态(modal)标准型, 也可以是伴随(companion)标准型形式。

当系统矩阵  $A$  可对角化但具有共轭复数特征值时, 若仍用 1.3.1 节的方法化成对角标准型, 计算特征向量将出现复数向量, 且对角标准型及变换阵均为复数矩阵, 给分析计算带来困难, 且复数的物理意义也不清晰, 此时, 可将系统矩阵化为模态(modal)标准型。设二阶系统  $\Sigma(A, B, C)$  具有共轭复数特征值  $\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ , 则可用线性非奇异状态变换将系统矩阵化为形如

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

的模态(modal)标准型。且可证明变换阵为

$$T = [\alpha \quad \beta]$$

式中, 列向量  $\alpha, \beta$  分别是对应特征值  $\lambda_1 = \sigma + j\omega$  的复数特征向量  $\alpha + j\beta$  的实部、虚部。

【例 1-29】已知系统  $\Sigma(A, B, C, D)$  的系数阵为

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 2 \quad 5 \quad 2], D = 0$$

将其变换为模态标准型或对角标准型, 并给出变换阵。

解 应用状态方程的规范实现函数 `canon()` 容易进行该变换, MATLAB Program 1\_6 为求解本题的程序。

```
%MATLAB Program 1_6
A=[5 2 1 0;0 4 6 0;0 -3 -5 0;0 -3 -6 -1];
B=[1;2;3;4];C=[1 2 5 2];D=0;
sys=ss(A,B,C,D);
[G,T]=canon(sys,'modal')
```

程序 MATLAB Program 1\_6 运行结果略。

## 小 结

状态空间表达式是状态空间法的基础。相对于系统的输入、输出外部描述,状态空间表达式是一种内部模型,其用状态方程和输出方程完全地表征了系统的动态行为和结构特性。根据动态系统的基本分类,状态空间描述模型有连续系统和离散系统、线性系统和非线性系统、定常系统和时变系统之分,本章主要阐述并分析线性定常系统状态空间描述的形式、建立方法、特性和变换。线性定常连续系统与线性定常离散系统的外部模型之间,以及内部模型之间,具有结构形式上的一致性,为了避免重复,本章在重点讲述线性定常连续系统状态空间描述的基础上,将其分析方法推广到线性定常离散系统。

建立动态系统状态空间表达式的基本途径有两种。其一,基于系统实际结构的“机理建模法”,其关键在于正确选择状态变量和合理运用支配系统运动的物理定律;其二,基于系统输入、输出描述的转化(实现)方法,其关键是在保持系统输入、输出关系不变的前提下,构造出状态空间描述的系数矩阵。本章仅讨论了 SISO 线性定常系统的实现问题,给出了级联分解、串联分解、并联分解 3 种实现方法,并阐述了能控标准型、能观标准型、约当标准型 3 种具有较好结构特性的典型实现。MIMO 系统实现问题将在第 3 章讨论。

实现具有非唯一性,而实现的逆问题,即从线性定常系统状态空间表达式求其传递函数(阵)却是唯一的。本章在介绍由状态空间表达式求传递函数阵之后,讨论了两个子系统并联、串联或反馈连接后的组合系统的状态空间表达式和传递函数阵,这些分析与计算方法建立了沟通经典控制理论和现代控制理论的桥梁。

状态空间描述坐标变换的代数实质是线性非奇异变换,其可导出体现各种层面系统结构特征的状态空间模型标准型,从而简化系统分析和综合的计算过程。线性定常系统的特征多项式、特征值、传递函数阵、极点等固有特性在线性非奇异变换下保持不变。本章仅讨论了将状态空间表达式变换为约当标准型问题(对角线标准型可视为约当标准型的特例)。

本章最后介绍了在 MATLAB 工作空间建立线性定常系统传递函数模型和状态空间描述模型的方法,并介绍了模型变换的 MATLAB 函数。

## 思考题与习题 1

- 1-1 动态系统与静态系统有什么区别?
- 1-2 什么是状态变量?什么是输出变量?它们在概念上有什么区别?
- 1-3 状态方程与输出方程有什么区别?
- 1-4 为什么说状态空间描述法是一种内部描述,传递函数是一种外部描述?
- 1-5 状态空间表达式中,矩阵  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  的含义是什么?

1-6 状态变量与内部变量有什么区别？

1-7 如果一个动态系统中，含有 3 个储能元件，能否确定该系统是 3 阶系统？

1-8 一个动态系统，状态变量间为最简耦合形式的 **A** 矩阵有什么特征？

1-9 状态向量的线性非奇异变换的本质是什么？

1-10 如图 1-31 所示电路，以电压  $u_1(t)$ 、 $u_2(t)$  为输入量，建立以电容  $C$  上电压、电感  $L$  中电流为状态变量，电阻  $R_1$ 、 $R_2$  上电压为输出量的状态空间表达式。

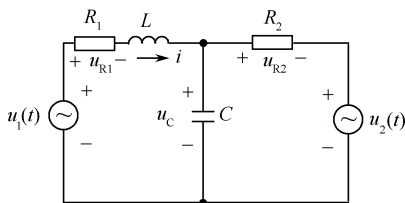


图 1-31 题 1-10 图

1-11 如图 1-32 所示电路，以电压  $u(t)$  为输入量，建立以电容  $C_1$ 、 $C_2$  上的电压为状态变量，电容  $C_2$  上的电压为输出量的状态空间表达式。

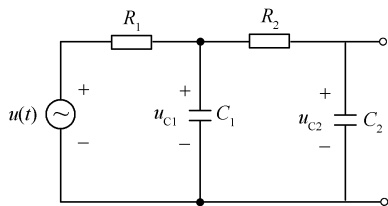


图 1-32 题 1-11 图

1-12 机械平移系统如图 1-33 所示，建立以外力  $f(t)$  为输入，质量块的位移  $y_1$ 、 $y_2$  为输出的状态空间表达式。

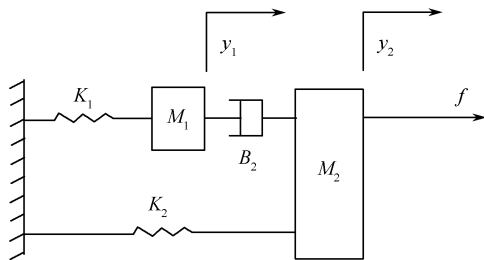


图 1-33 题 1-12 图

1-13 双容器液位系统如图 1-34 所示，建立以输入流量  $Q$  为输入，液面高度为输出的状态空间表达式。

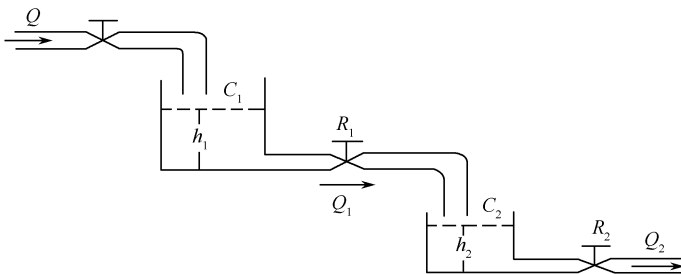


图 1-34 题 1-13 图

1-14 发电机-电动机组如图 1-35 所示，建立以发电机的励磁电压  $u_f$  为输入，电动机轴的转速  $n$  为输出的状态空间表达式。图中， $R_f$ 、 $L_f$  为发电机励磁绕组的电阻和电感， $R_a$  和  $L_a$  为发电机和电动机回路的总电枢电阻和总电枢电感， $\omega_0$  为发电机转子的恒定角速度， $J$ 、 $f$  分别为电动机轴上的转动惯量和阻尼系数。

1-15 控制系统的方块图如图 1-36 所示，画出系统的状态变量图，建立其状态空间表达式。

1-16 双输入、双输出系统的状态变量图如图 1-37 所示，试求其状态空间表达式。

1-17 动态系统的微分方程为

$$(1) \ddot{y} + 0.15\dot{y} + 0.2y = 0.5\dot{u} + 0.1u$$

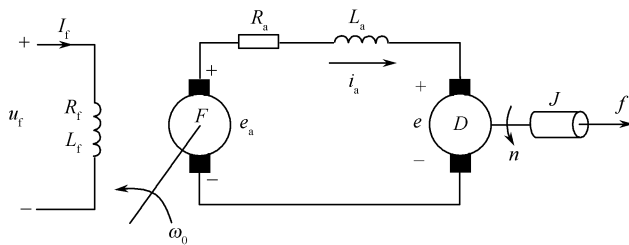


图 1-35 题 1-14 图

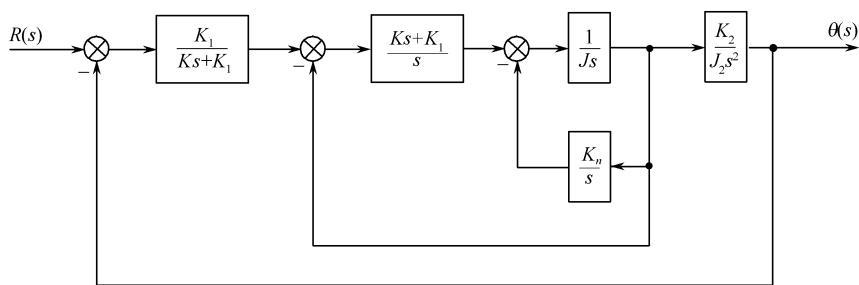


图 1-36 习题 1-15 图

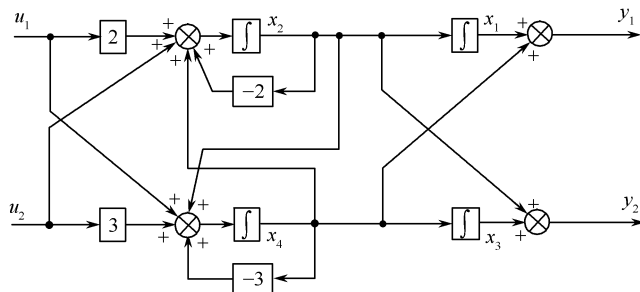


图 1-37 题 1-16 图

(2)  $\ddot{y} + 5\dot{y} + 7y = \ddot{u} + 3\dot{u} + 2u$

求其相应的状态空间表达式,并画出状态变量图。

1-18 已知系统的传递函数或微分方程为

(1)  $G(s) = \frac{6(s-1)}{s(s+1)(s+3)}$

(2)  $G(s) = \frac{6(s+1)}{s(s+2)(s+5)^2}$

(3)  $\ddot{y} + 6\dot{y} + 12y = \dot{u} + 6u$

(4)  $G(s) = \frac{s^2 + 2s + 2}{s^2 + 5s + 6}$

试用并联法求其状态空间表达式,并求其能控标准型实现、能观标准型实现,画出相应的状态变量图。

1-19 求下列矩阵的特征向量。

(1)  $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$  (2)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$  (3)  $\begin{bmatrix} 6 & 3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{bmatrix}$  (4)  $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

1-20 将下列状态方程化为对角标准型或约当标准型。

$$(1) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (2) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ -12 & -7 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (4) \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

1-21 系统的状态空间表达式如下,试求其传递函数阵。

$$(1) \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

1-22 已知两系统的传递函数分别为

$$G_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \\ 0 & \frac{s+1}{s+2} \end{bmatrix}, G_2(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+3} & \frac{1}{s+4} \\ \frac{1}{s+1} & 0 \end{bmatrix}$$

试分别求两系统串联、并联连接的传递函数阵。

1-23 已知系统结构如图 1-38 所示,其中

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & -\frac{1}{s} \\ 2 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \\ H(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

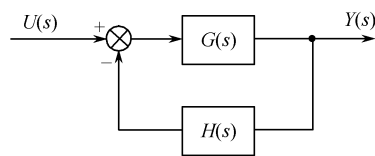


图 1-38 题 1-23 图

求系统的闭环传递函数阵。

1-24 设离散系统的差分方程为

$$y(k+3) + 3y(k+2) + 2y(k+1) + y(k) = u(k+2) + 2u(k+1) + u(k)$$

试求其能控标准型状态空间表达式并画出状态变量图。

1-25 设离散系统的差分方程为

$$y(k+2) + 3y(k+1) + 2y(k) = 2u(k+1) + 3u(k)$$

求输入矩阵  $\mathbf{H}$  为下列形式的状态空间表达式。

$$(1) \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2) \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1-26 已知离散系统的脉冲传递函数为

$$G(z) = \frac{z^2 + 2z + 3}{z^2 + 3z + 2}$$

试求其对角形标准型实现。

1-27 已知离散系统状态空间表达式为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = [0 \quad 1] \mathbf{x}(k) + u(k) \end{cases}$$

试求其脉冲传递函数。

1-28 证明下述两系统的传递函数相同。

$\Sigma_1(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}]$$

$\Sigma_2(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}})$  为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}, [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1]$$

1-29 设  $\mathbf{A}$  为友矩阵, 且具有  $n$  个互异的特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ , 试证以范德蒙德矩阵为变换矩阵, 可将  $\mathbf{A}$  化为对角形标准型。

## 上机实验题 1

1-1 系统的微分方程为

$$y^{(3)}(t) + 6y^{(2)}(t) + 6\dot{y} + 10y = 10\dot{u} + 10u$$

试用 MATLAB 求其状态空间表达式。

1-2 系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{s^2 + 6s + 8}{s^2 + 4s + 3}$$

试用 MATLAB 求其状态空间表达式。

1-3 系统的传递函数为

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{2s + 1}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8}$$

试用 MATLAB 求其约当标准型状态空间表达式。

1-4 系统的传递函数为

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{2s^2 + 5s + 1}{(s-2)^3}$$

试用 MATLAB 求其约当标准型状态空间表达式。

1-5 系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{(s-1)(s+2)}{(s+1)(s-2)(s+3)}$$

试用 MATLAB 求其状态空间表达式。

1-6 系统状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ -50 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [0]u \end{cases}$$

试用 MATLAB 求系统的传递函数。

1-7 系统状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

试用 MATLAB 求系统的传递函数阵。

1-8 子系统  $\Sigma_1(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1)$  为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y_1 = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

子系统  $\Sigma_2(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2)$  为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y_2 = [2 \quad 1] \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \end{cases}$$

试用 MATLAB 求  $\Sigma_1, \Sigma_2$  并联、串联和负反馈连接的组合系统的状态空间表达式及传递函数。

1-9 系统的传递函数方块图如图 1-39 所示, 试用 MATLAB 求其状态空间表达式。

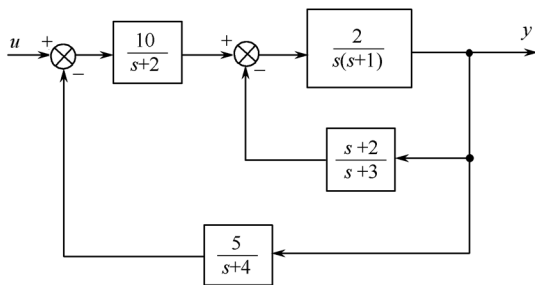


图 1-39 上机实验题 1-9 图

## 第2章 线性系统动态分析

### 2.1 引言

在第1章已说明如何建立描述自动控制系统运动规律的数学模型,要全面了解系统的动态性能,就必须基于其动态数学模型进行定量和定性的分析。

对线性系统动态性能进行定量分析实质上是求解其动态数学模型方程并分析解的性质,有传递函数法和状态空间分析法两种方法。传递函数法是经典控制理论的主要分析方法,其通过拉普拉斯变换或 $Z$ 变换将线性系统的微分方程或差分方程化为容易处理的代数方程,并获得描述系统输入、输出关系的动态数学模型——传递函数,通过系统传递函数零、极点的分布间接确定其动态响应。状态空间分析法是现代控制理论的主要分析方法,其直接将系统的微分方程或差分方程化为描述系统输入、输出与内部状态关系的动态数学模型——状态空间表达式,运用矩阵方法求解状态方程,直接在时域确定其动态响应,研究系统状态方程的解法及分析解的性质是现代控制理论的主要任务之一。

本章主要阐述线性定常连续、离散系统动态响应的解析求解和应用 MATLAB 软件数值求解的方法,并简要介绍线性时变系统状态方程的解法。对系统重要的结构性质(能控性、能观性、稳定性)的定性分析将在后续章节介绍。

### 2.2 线性定常齐次状态方程的解

线性定常系统在输入  $u$  为零时,由初始状态引起的运动称为自由运动,其可用式(2-1)所示的齐次状态方程描述,即

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(t)|_{t=t_0} = \mathbf{x}(t_0) \end{cases} \quad (2-1)$$

式中,  $\mathbf{x}$  为线性定常系统的  $n$  维状态向量;  $\mathbf{x}(t_0)$  为  $n$  维状态向量在初始时刻  $t=t_0$  的初值;  $\mathbf{A}$  为线性定常系统的  $n \times n$  维系统矩阵。

式(2-1)的解  $\mathbf{x}(t)$  (其中  $t \geq t_0$ ) 称为自由运动的解或零输入响应。若矩阵  $\mathbf{A}$  仅为一阶,即  $\mathbf{A} = a$  ( $a$  为常数),则向量-矩阵微分方程式(2-1)变为式(2-2)所示的标量微分方程,即

$$\begin{cases} \dot{x} = ax \\ x(t)|_{t=t_0} = x(t_0) \end{cases} \quad (2-2)$$

式(2-2)为一阶线性齐次常微分方程,由高等数学常微分方程求解理论,其满足初始条件  $x(t)|_{t=t_0} = x(t_0)$  的解为

$$x(t) = e^{a(t-t_0)} x(t_0), t \geq t_0 \quad (2-3)$$

式(2-3)中的指数函数  $e^{a(t-t_0)}$  可展为泰勒级数

$$e^{a(t-t_0)} = 1 + a(t-t_0) + \frac{1}{2!}a^2(t-t_0)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}a^k(t-t_0)^k + \cdots \quad (2-4)$$



仿照标量微分方程的解,设式(2-1)的解为式(2-5)所示的向量幂级数,即

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1(t-t_0) + \mathbf{b}_2(t-t_0)^2 + \cdots + \mathbf{b}_k(t-t_0)^k + \cdots \quad (2-5)$$

将式(2-5)代入式(2-1),得

$$\begin{aligned} & \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2(t-t_0) + 3\mathbf{b}_3(t-t_0)^2 + \cdots + k\mathbf{b}_k(t-t_0)^{k-1} + \cdots \\ & = \mathbf{A}(\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1(t-t_0) + \mathbf{b}_2(t-t_0)^2 + \cdots + \mathbf{b}_k(t-t_0)^k + \cdots) \end{aligned} \quad (2-6)$$

若所设解为真实解,则式(2-6)两边同幂次项系数应相等,即

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 = \mathbf{A}\mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{A}\mathbf{b}_1 = \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2\mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_3 = \frac{1}{3}\mathbf{A}\mathbf{b}_2 = \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3\mathbf{b}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_k = \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k\mathbf{b}_0 \end{cases} \quad (2-7)$$

将初始条件  $\mathbf{x}(t)|_{t=t_0} = \mathbf{x}(t_0)$  代入式(2-5),得  $\mathbf{b}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ ,则式(2-1)的解为

$$\mathbf{x}(t) = \left( \mathbf{I} + \mathbf{A}(t-t_0) + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2(t-t_0)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k(t-t_0)^k + \cdots \right) \mathbf{x}(t_0) \quad (2-8)$$

式中,  $\mathbf{I}$  为  $n$  阶单位矩阵。仿照式(2-4)中标量指数函数  $e^{a(t-t_0)}$  的无穷级数定义,定义式(2-8)括号中的  $n$  阶矩阵无穷级数为矩阵指数  $e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$ ,即

$$e^{\mathbf{A}(t-t_0)} = \mathbf{I} + \mathbf{A}(t-t_0) + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2(t-t_0)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k(t-t_0)^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k(t-t_0)^k \quad (2-9)$$

式中,规定  $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$ 。

则式(2-1)的解可用系统矩阵  $\mathbf{A}$  的矩阵指数表达为

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) \quad (2-10)$$

式(2-10)表明,线性定常系统在无输入作用即  $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{0}$  时,任一时刻  $t$  的状态  $\mathbf{x}(t)$  是由起始时刻  $t_0$  的初始状态  $\mathbf{x}(t_0)$  在  $t-t_0$  时间内通过矩阵指数  $e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$  演化而来的。鉴于此,将矩阵指数  $e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$  称为状态转移矩阵,并记为

$$e^{\mathbf{A}(t-t_0)} = \boldsymbol{\Phi}(t-t_0) \quad (2-11)$$

状态转移矩阵是现代控制理论最重要概念之一,由此可将齐次状态方程的解表达为统一形式,即

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t-t_0) \mathbf{x}(t_0) \quad (2-12)$$

式(2-12)的物理意义是:自由运动的解仅是初始状态的转移,状态转移矩阵包含系统自由运动的全部信息,其唯一决定了系统中各状态变量的自由运动。对线性定常系统而言,在某一确定时刻,其状态转移矩阵  $\boldsymbol{\Phi}(t-t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$  为  $n$  阶常数矩阵,式(2-12)所表达的  $\mathbf{x}(t_0)$  与  $\mathbf{x}(t)$  之间的转移关系在数学上可视为  $n$  维向量中的一种以状态转移矩阵  $e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$  为变换阵的线性变换。

以上分析均设初始时刻  $t_0 \neq 0$ 。若  $t_0 = 0$ , 则对应初始状态为  $\mathbf{x}(0)$ , 自由运动的解为

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) = e^{At}\mathbf{x}(0) \quad (2-13)$$

为了表达简便, 以下的讨论若不作说明, 均设初始时刻  $t_0 = 0$ 。

## 2.3 状态转移矩阵的性质及其计算方法

### 2.3.1 线性定常系统状态转移矩阵的运算性质

$$1. \dot{\Phi}(t) = A\Phi(t) = \Phi(t)A$$

$$\begin{aligned} \text{证明} \quad \dot{\Phi}(t) &= \frac{d(e^{At})}{dt} = \frac{d\left(I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \cdots\right)}{dt} \\ &= A + A^2t + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}A^kt^{k-1} + \frac{1}{k!}A^{k+1}t^k + \cdots = A\Phi(t) = \Phi(t)A \end{aligned}$$

这一性质表明,  $\Phi(t) = e^{At}$  满足齐次状态方程  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ , 且  $A\Phi(t)$  与  $\Phi(t)A$  满足交换律。事实上,  $\Phi(t) = e^{At}$  是非奇异矩阵(证明见性质 4), 从式(2-13)可见, 齐次状态方程对应初始状态  $\mathbf{x}(0)$  的解  $\mathbf{x}(t)$  为  $\Phi(t) = e^{At}$  的  $n$  个线性无关列向量的线性组合。因此,  $\Phi(t) = e^{At}$  的  $n$  个线性无关列向量构成齐次状态方程的基本解组, 其仅与系统矩阵  $A$  有关, 而与输入、输出无关, 这与标量微分方程解的结构理论本质一致。鉴于此,  $\Phi(t) = e^{At}$  也称为  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$  的基本解矩阵。

$$2. \Phi(0) = I$$

这一性质可由  $\Phi(t) = e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \cdots$  的定义式中令  $t=0$  得证。结合

性质 1, 有  $\dot{\Phi}(0) = A$ 。

$$3. \Phi(t)\Phi(\tau) = \Phi(t+\tau)$$

$$\begin{aligned} \text{证明} \quad \Phi(t)\Phi(\tau) &= e^{At}e^{A\tau} \\ &= \left(I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \cdots\right) \times \\ &\quad \left(I + A\tau + \frac{1}{2!}A^2\tau^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k\tau^k + \cdots\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} A^k \left( \sum_{i=0}^k \frac{t^i}{i!} \frac{\tau^{k-i}}{(k-i)!} \right) \end{aligned}$$

由二项式定理, 有

$$(t+\tau)^k = \sum_{i=0}^k \frac{k!}{i!(k-i)!} t^i \tau^{k-i}$$

故

$$\Phi(t)\Phi(\tau) = e^{At}e^{A\tau} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{(t+\tau)^k}{k!} = e^{A(t+\tau)} = \Phi(t+\tau)$$

这一性质表明, 状态转移矩阵具有分解性。由此分解性, 易推知, 若  $n$  为整数, 则  $\Phi(nt) = (\Phi(t))^n$ 。

$$4. (\Phi(t))^{-1} = \Phi(-t)$$

证明 由状态转移矩阵的分解性, 有

$$\begin{aligned} \Phi(t)\Phi(-t) &= \Phi(t-t) = \Phi(0) = e^{A \cdot 0} = I \\ \Phi(-t)\Phi(t) &= \Phi(-t+t) = \Phi(0) = e^{A \cdot 0} = I \end{aligned}$$

又由逆矩阵定义得

$$(\Phi(t))^{-1} = \Phi(-t) \quad \text{或} \quad (\Phi(-t))^{-1} = \Phi(t)$$

这一性质表明,状态转移矩阵非奇异,系统状态的转移是双向、可逆的。 $t$ 时刻的状态 $\mathbf{x}(t)$ 由初始状态 $\mathbf{x}(0)$ 在时间 $t$ 内通过状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 转移而来,即 $\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0)$ ;则 $\mathbf{x}(0)$ 可由 $\mathbf{x}(t)$ 通过 $\Phi(t)$ 的逆转移而来,即 $\mathbf{x}(0) = (\Phi(t))^{-1}\mathbf{x}(t)$ 。

$$5. \Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0) = \Phi(t_2 - t_0), t_0 < t_1 < t_2$$

证明 由状态转移矩阵的分解性,有

$$\begin{aligned} \Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0) &= \Phi(t_2)\Phi(-t_1)\Phi(t_1)\Phi(-t_0) = \Phi(t_2)\Phi(-t_1 + t_1)\Phi(-t_0) \\ &= \Phi(t_2)\mathbf{I}\Phi(-t_0) = \Phi(t_2 - t_0) \end{aligned}$$

这一性质表明,系统状态的转移具有传递性, $t_0$ 至 $t_2$ 的状态转移等于 $t_0$ 至 $t_1$ 、 $t_1$ 至 $t_2$ 分段转移的累积。

以上性质均与标量指数函数 $e^a$ 的基本性质相似,但一般有

$$e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t} \neq e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t}$$

请读者证明:只有当 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 为可交换矩阵,即 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ 时,才有

$$e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t} = e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t}$$

## 2.3.2 线性定常系统状态转移矩阵的计算方法

### 1. 级数展开法

直接根据矩阵指数的定义式计算,即

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^kt^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^kt^k \quad (2-14)$$

级数展开法具有编程简单、适合于计算机数值求解的优点,但若采用手工计算,因需对无穷级数求和,难以获得解析表达式。

### 2. 拉普拉斯变换法

设 $t_0 = 0$ ,对式(2-1)两边取拉普拉斯变换得

$$s\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{x}(s)$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(0)$$

$$\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0)$$

取拉普拉斯反变换得, $t_0 = 0$ 时,式(2-1)的解为

$$\mathbf{x}(t) = L^{-1}(\mathbf{x}(s)) = L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]\mathbf{x}(0) \quad (2-15)$$

与式(2-13)对比,得

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] \quad (2-16)$$

事实上

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})[L(e^{\mathbf{A}t})] = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\left(\frac{\mathbf{I}}{s} + \frac{\mathbf{A}}{s^2} + \frac{\mathbf{A}^2}{s^3} + \cdots\right) = \mathbf{I}$$

故 $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ 的逆一定存在,即

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\mathbf{I}}{s} + \frac{\mathbf{A}}{s^2} + \frac{\mathbf{A}^2}{s^3} + \cdots$$

则

$$L^{-1}[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}]=\mathbf{I}+\mathbf{A}t+\frac{\mathbf{A}^2}{2!}t^2+\cdots+\frac{\mathbf{A}^k}{k!}t^k+\cdots=e^{\mathbf{A}t}$$

因此,式(2-16)给出了求解  $e^{\mathbf{A}t}$  闭合形式的一种简便方法,只要预先算出“预解矩阵” $[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}]$ ,然后对“预解矩阵”进行拉普拉斯反变换即求得  $e^{\mathbf{A}t}$ 。

### 3. 利用特征值标准型及相似变换计算

(1)若  $n$  阶方阵  $\mathbf{A}$  的特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , 且互异

设对应的模态矩阵为

$$\mathbf{V}=[\mathbf{V}_1 \quad \mathbf{V}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{V}_n] \quad (2-17)$$

式中,列向量  $\mathbf{V}_i$  为对应于特征值  $\lambda_i$  的特征向量,即  $\mathbf{A}\mathbf{V}_i=\lambda_i\mathbf{V}_i$ , 且有

$$\mathbf{A}=\mathbf{V}\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n\end{bmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

则

$$e^{\mathbf{A}t}=\mathbf{V}\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & & & \mathbf{0} \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}\mathbf{V}^{-1} \quad (2-18)$$

证明 因为  $e^{\mathbf{A}t}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k$ , 所以

$$\mathbf{V}^{-1}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{V}=\mathbf{V}^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k\right)\mathbf{V}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}^k\mathbf{V} \quad (2-19)$$

$$\text{又 } \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n\end{bmatrix}=\mathbf{\Lambda}, \text{ 其中, } \mathbf{\Lambda} \text{ 为方阵 } \mathbf{A} \text{ 对应的对角线标准型。}$$

$$\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}^2\mathbf{V}=\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{V}=\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{I}\mathbf{A}\mathbf{V}=\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}=(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V})(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V})=\mathbf{\Lambda}^2$$

推广得

$$\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}^k\mathbf{V}=(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V})^k=\mathbf{\Lambda}^k \quad (2-20)$$

将式(2-20)代入式(2-19)得

$$\begin{aligned}\mathbf{V}^{-1}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{V} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k\mathbf{\Lambda}^k=e^{\mathbf{\Lambda}t} \\ &= \begin{bmatrix}1 & & & \mathbf{0} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\lambda_1 t & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 t & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n t\end{bmatrix} + \cdots + \frac{1}{k!} \begin{bmatrix}\lambda_1^k t^k & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2^k t^k & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n^k t^k\end{bmatrix} + \cdots\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k t^k}{k!} & & & \mathbf{0} \\ & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^k t^k}{k!} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^k t^k}{k!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \mathbf{0} \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (2-21)$$

则

$$e^{At} = \mathbf{V} e^{(\mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V})t} \mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V} e^{At} \mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \mathbf{0} \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \mathbf{V}^{-1}$$

故式(2-18)得证。

由式(2-18)及以上证明过程,可得如下结论:

①对方阵  $\mathbf{A}$  进行相似变换所得相似矩阵  $\mathbf{PAP}^{-1}$  的矩阵指数等于对  $\mathbf{A}$  的矩阵指数作相同的相似变换,即

$$\mathbf{P} e^{At} \mathbf{P}^{-1} = e^{(\mathbf{PAP}^{-1})t} \quad (2-22)$$

②若  $n$  阶方阵  $\mathbf{A}$  的特征值  $\lambda_i (i=1, 2, \dots, n)$  互异,则其矩阵指数  $e^{At}$  的  $n$  个特征值分别为  $e^{\lambda_i t}, i=1, 2, \dots, n$ , 且  $e^{At}$  与  $\mathbf{A}$  具有相同的模态矩阵  $\mathbf{V}$ 。

(2)若  $n$  阶方阵  $\mathbf{A}$  有重特征值时

当  $\mathbf{A}$  有重特征值时,只有在  $\mathbf{A}$  有  $n$  个线性无关的特征向量即诸重特征值的几何重数等于其代数重数的条件下,  $\mathbf{A}$  才能经相似变换化为对角线标准型  $\mathbf{\Lambda}$ ; 否则,存在非奇异变换阵  $\mathbf{P}$ , 使相似变换后的矩阵  $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}$  为约当(Jordan)标准型  $\mathbf{J}$ , 即

$$\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} \quad (2-23)$$

仅考虑诸重特征值的几何重数均为 1 的特殊情况,则

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{J}_l \end{bmatrix} \quad (2-24)$$

式中,  $\mathbf{J}_i (i=1, 2, \dots, l)$  为形如式(2-25)所示的  $m_i$  维约当块, 即

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ \mathbf{0} & & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{m_i \times m_i} \quad (2-25)$$

式(2-25)中的  $\lambda_i (i=1, 2, \dots, l)$  为方阵  $\mathbf{A}$  的  $m_i$  重特征值, 其几何重数  $\alpha_i = n - \text{rank}(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 1$ , 且  $\sum_{i=1}^l m_i = n$ 。若  $m_i = 1$ , 则  $\mathbf{J}_i = \lambda_i$ , 为约当块的特例。对应于式(2-23), 由式(2-22), 有

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P} \mathbf{e}^{\mathbf{J}t} \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{J_1 t} & & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{e}^{J_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{e}^{J_l t} \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \quad (2-26)$$

式中,  $m_i$  维子矩阵  $\mathbf{e}^{J_i t}$  ( $i=1,2,\dots,l$ ) 为式(2-25)所示约当块  $\mathbf{J}_i$  的矩阵指数, 根据矩阵指数的定义式, 可证明  $\mathbf{e}^{J_i t}$  为式(2-27)所示的上三角形矩阵, 即

$$\mathbf{e}^{J_i t} = \mathbf{e}^{\lambda_i t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{m_i-1}}{(m_i-1)!} \\ & 1 & t & \cdots & \frac{t^{m_i-2}}{(m_i-2)!} \\ & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & 1 & t & \\ & & & 1 & \end{bmatrix}_{m_i \times m_i} \quad (2-27)$$

#### 4. 化为 $\mathbf{A}$ 的有限项多项式计算 $\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}$

(1) 凯莱-哈密顿(Cayley-Hamilton)定理

$n$  阶方阵  $\mathbf{A}$  满足其特征方程, 即设  $n$  阶方阵  $\mathbf{A}$  的特征方程为

$$f(\lambda) = |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

则

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + a_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \cdots + a_1 \mathbf{A} + a_0 \mathbf{I} = \mathbf{0}$$

凯莱-哈密顿定理是矩阵论的重要定理, 基于该定理可将  $\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}$  的无穷级数定义式简化为有限项多项式计算, 从而适合求  $\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}$  的解析形式。有关该定理的证明可参阅矩阵理论的有关著作。

(2) 待定系数法计算  $\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}$

根据凯莱-哈密顿定理, 对  $n$  阶方阵  $\mathbf{A}$ , 当  $k \geq n$  时,  $\mathbf{A}^k$  可用  $\mathbf{A}$  的  $(n-1)$  次多项式表示, 即在  $\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}$  的无穷级数定义式中, 仅有  $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}, \mathbf{A}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}$  是独立的, 而所有  $k \geq n$  的  $\mathbf{A}^k$  均可表示为  $\mathbf{I}, \mathbf{A}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}$  的线性组合, 故  $\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}$  可用  $\mathbf{A}$  的  $(n-1)$  次多项式表示, 即

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} = \alpha_0(t) \mathbf{I} + \alpha_1(t) \mathbf{A} + \cdots + \alpha_{n-1}(t) \mathbf{A}^{n-1} \quad (2-28)$$

式中,  $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$  为待定的一组关于  $t$  的标量函数, 其求解需要先计算  $\mathbf{A}$  的特征值。

① 若  $n$  阶方阵  $\mathbf{A}$  的特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , 且互异, 则采用式(2-17)的模态矩阵  $\mathbf{V}$  对式(2-28)作相似变换, 得

$$\mathbf{V}^{-1} \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} \mathbf{V} = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A}^i \mathbf{V} \alpha_i(t) \quad (2-29)$$

由式(2-20)、式(2-22), 式(2-29)化简为

$$\mathbf{e}^{(\mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V})t} = \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{\lambda_1 t} & & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{e}^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{e}^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{A}^i \alpha_i(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t) \begin{bmatrix} \lambda_1^i & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2^i & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n^i \end{bmatrix} \quad (2-30)$$

将式(2-30)展开,得

$$\begin{cases} \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_1^{(n-1)} = e^{\lambda_1 t} \\ \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_2 + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_2^{(n-1)} = e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_n + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_n^{(n-1)} = e^{\lambda_n t} \end{cases} \quad (2-31)$$

式(2-31)为关于  $\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}$  的  $n$  个独立方程,解之,得

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (2-32)$$

②若  $n$  阶方阵  $\mathbf{A}$  有重特征值,这时由式(2-31)构成的关于  $\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}$  的独立方程数将小于  $n$ ,必须补充新的方程。不失一般性,设  $\mathbf{A}$  有一个  $m$  重的特征值  $\lambda_0$ ,其余  $n-m$  个特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n-m}$  为单特征值,则由式(2-31)构成的关于  $\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}$  的独立方程数为  $n-m+1$  个,即

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 + \alpha_2(t)\lambda_1^2 + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1} \\ e^{\lambda_2 t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_2 + \alpha_2(t)\lambda_2^2 + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_2^{n-1} \\ \vdots \\ e^{\lambda_{n-m} t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_{n-m} + \alpha_2(t)\lambda_{n-m}^2 + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_{n-m}^{n-1} \\ e^{\lambda_0 t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_0 + \alpha_2(t)\lambda_0^2 + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_0^{n-1} \end{cases} \quad (2-33)$$

这时可对下式

$$e^{\lambda t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda + \alpha_2(t)\lambda^2 + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\lambda^{n-1}$$

两边在  $\lambda = \lambda_0$  处从一阶到  $m-1$  阶逐阶求导( $m-1$ )次,以补充( $m-1$ )个独立方程,即

$$\begin{cases} t e^{\lambda_0 t} = \alpha_1(t) + 2\alpha_2(t)\lambda_0 + \cdots + (n-1)\alpha_{n-1}(t)\lambda_0^{n-2} \\ t^2 e^{\lambda_0 t} = 2! \alpha_2(t) + 3! \alpha_3(t)\lambda_0 + \cdots + (n-1)(n-2)\alpha_{n-1}(t)\lambda_0^{n-3} \\ \vdots \\ t^{m-1} e^{\lambda_0 t} = (m-1)! \alpha_{m-1}(t) + m! \alpha_m(t)\lambda_0 + \cdots + (n-1)(n-2) \cdots (n-m+1)\alpha_{n-1}(t)\lambda_0^{n-m} \end{cases} \quad (2-34)$$

联立求解式(2-33)及式(2-34),可求得待定的标量函数  $\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}$ 。特别地,若  $n$  阶方阵  $\mathbf{A}$  的特征值  $\lambda_0$  为  $n$  重,则  $\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}$  的解为

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \\ \vdots \\ \alpha_{n-2}(t) \\ \alpha_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_0 & \lambda_0^2 & \cdots & \lambda_0^{n-2} & \lambda_0^{n-1} \\ 0 & 1 & 2\lambda_0 & \cdots & (n-2)\lambda_0^{n-3} & (n-1)\lambda_0^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{(n-2)(n-3)}{2!}\lambda_0^{n-4} & \frac{(n-1)(n-2)}{2!}\lambda_0^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & (n-1)\lambda_0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_0 t} \\ \frac{1}{1!} t e^{\lambda_0 t} \\ \frac{1}{2!} t^2 e^{\lambda_0 t} \\ \vdots \\ \frac{1}{(n-2)!} t^{n-2} e^{\lambda_0 t} \\ \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{\lambda_0 t} \end{bmatrix} \quad (2-35)$$

【例 2-1】 已知  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ , 求  $\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}$ 。

解

方法一 运用级数展开法求解

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 t^2 + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} t + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}^2 t^2 + \frac{1}{3!} \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}^3 t^3 + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{3}{2}t^2 + 2t^3 + \dots & -3t + 6t^2 - \frac{13}{2}t^3 + \dots \\ t - 2t^2 + \frac{13}{6}t^3 + \dots & 1 - 4t + \frac{13}{2}t^2 - \frac{20}{3}t^3 + \dots \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-t} - e^{-3t} & -3e^{-t} + 3e^{-3t} \\ e^{-t} - e^{-3t} & -e^{-t} + 3e^{-3t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

方法二 运用拉普拉斯变换法求解

$$\begin{aligned} (s\mathbf{I} - \mathbf{A}) &= \begin{bmatrix} s & 3 \\ -1 & s+4 \end{bmatrix} \\ (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \frac{1}{(s+1)(s+3)} \begin{bmatrix} s+4 & -3 \\ 1 & s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{3}{2(s+1)} - \frac{1}{2(s+3)} & -\frac{3}{2(s+1)} + \frac{3}{2(s+3)} \\ \frac{1}{2(s+1)} - \frac{1}{2(s+3)} & -\frac{1}{2(s+1)} + \frac{3}{2(s+3)} \end{bmatrix} \\ \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} &= L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-t} - e^{-3t} & -3e^{-t} + 3e^{-3t} \\ e^{-t} - e^{-3t} & -e^{-t} + 3e^{-3t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

方法三 利用特征值标准型及相似变换求解

$\mathbf{A}$  为友矩阵的转置, 可直接列出其特征方程

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

特征值  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3$ , 可求得其对应的特征向量分别为  $\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ , 则  $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,

$\mathbf{V}^{-1} = \frac{\text{adj}\mathbf{V}}{|\mathbf{V}|} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$ , 即有

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} &= \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \mathbf{\Lambda} \\ \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{V} \mathbf{e}^{(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V})t} \mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V} \mathbf{e}^{\mathbf{\Lambda}t} \mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \mathbf{V}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-t} - e^{-3t} & -3e^{-t} + 3e^{-3t} \\ e^{-t} - e^{-3t} & -e^{-t} + 3e^{-3t} \end{bmatrix}$$

方法四 待定系数法计算

$$e^{At} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A$$

式中

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-3t} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-t} - e^{-3t} \\ e^{-t} - e^{-3t} \end{bmatrix}$$

则

$$\begin{aligned} e^{At} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-t} - e^{-3t} & 0 \\ 0 & 3e^{-t} - e^{-3t} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -3e^{-t} + 3e^{-3t} \\ e^{-t} - e^{-3t} & -4e^{-t} + 4e^{-3t} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-t} - e^{-3t} & -3e^{-t} + 3e^{-3t} \\ e^{-t} - e^{-3t} & -e^{-t} + 3e^{-3t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

【例 2-2】 已知  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ , 分别应用特征值标准型及相似变换、待定系数法求  $e^{At}$ 。

解 矩阵  $A$  的特征方程

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda - 3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2 = 0$$

特征值  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$  (2 重), 2 重特征值  $\lambda_2 = 1$  的几何重数  $\alpha_2 = n - \text{rank}(\lambda_2 I - A) = 3 - 2 = 1$ 。

方法一 应用特征值标准型及相似变换计算

2 重特征值  $\lambda_2$  的几何重数  $\alpha_2 = 1$ , 故其对应的独立特征向量个数为 1 个,  $A$  只有两个线性无关的特征向量, 只能与约当阵相似, 易求得相似变换矩阵

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = J$$

则

$$\begin{aligned} e^{At} &= P e^{Jt} P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^t - 2te^t & te^t & 0 \\ -4te^t & e^t + 2te^t & 0 \\ e^t + 2te^t - e^{2t} & -e^t - te^t + e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## 方法二 应用待定系数法求解

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} = \alpha_0(t)\mathbf{I} + \alpha_1(t)\mathbf{A} + \alpha_2(t)\mathbf{A}^2$$

因为  $\lambda_1=2, \lambda_2=1$  (2重), 由式(2-31)仅构成两个关于  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  的独立方程, 即

$$\begin{cases} \mathbf{e}^{\lambda_1 t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 + \alpha_2(t)\lambda_1^2 \\ \mathbf{e}^{\lambda_2 t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_2 + \alpha_2(t)\lambda_2^2 \end{cases}$$

需对下式

$$\mathbf{e}^{\lambda t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda + \alpha_2(t)\lambda^2$$

两边在  $\lambda=\lambda_2$  处求一阶导数, 以补充一个独立方程, 即

$$t\mathbf{e}^{\lambda_2 t} = \alpha_1(t) + 2\alpha_2(t)\lambda_2$$

联立求解, 得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 0 & 1 & 2\lambda_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{\lambda_1 t} \\ \mathbf{e}^{\lambda_2 t} \\ t\mathbf{e}^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{2t} \\ \mathbf{e}^t \\ t\mathbf{e}^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{2t} \\ \mathbf{e}^t \\ t\mathbf{e}^t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{2t} - 2t\mathbf{e}^t \\ -2\mathbf{e}^{2t} + 2\mathbf{e}^t + 3t\mathbf{e}^t \\ \mathbf{e}^{2t} - \mathbf{e}^t - t\mathbf{e}^t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} &= \alpha_0(t)\mathbf{I} + \alpha_1(t)\mathbf{A} + \alpha_2(t)\mathbf{A}^2 = \alpha_0(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_1(t) \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \alpha_2(t) \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -8 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}^t - 2t\mathbf{e}^t & t\mathbf{e}^t & 0 \\ -4t\mathbf{e}^t & \mathbf{e}^t + 2t\mathbf{e}^t & 0 \\ \mathbf{e}^t + 2t\mathbf{e}^t - \mathbf{e}^{2t} & -\mathbf{e}^t - t\mathbf{e}^t + \mathbf{e}^{2t} & \mathbf{e}^{2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**【例 2-3】** 已知  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ , 分别应用特征值标准型及相似变换、待定系数法求  $\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}$ 。

**解** 矩阵  $\mathbf{A}$  的特征方程

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-4)^2 = 0$$

特征值  $\lambda_1=2, \lambda_2=4$  (2重), 2重特征值  $\lambda_2=4$  的几何重数  $\alpha_2 = n - \text{rank}(\lambda_2\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 3 - 1 = 2$ 。

**方法一** 应用特征值标准型及相似变换计算

2重特征值  $\lambda_2$  的几何重数  $\alpha_2=2$ , 故其独立特征向量个数为 2 个, 则  $\mathbf{A}$  有 3 个线性无关的特征向量, 其能与对角阵相似。易求得相似变换矩阵

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{V}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}=\mathbf{\Lambda}$$

则

$$\begin{aligned}\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{V}\mathbf{e}^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{V}^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\mathbf{e}^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}^{4t} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{e}^{4t}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix}2\mathbf{e}^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}^{2t} + \mathbf{e}^{4t} & \mathbf{e}^{4t} - \mathbf{e}^{2t} \\ 0 & \mathbf{e}^{4t} - \mathbf{e}^{2t} & \mathbf{e}^{2t} + \mathbf{e}^{4t}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

**方法二** 应用待定系数法求解

与例 2-2 方法二求解步骤相同,可得

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 0 & 1 & 2\lambda_2\end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix}\mathbf{e}^{\lambda_1 t} \\ \mathbf{e}^{\lambda_2 t} \\ t\mathbf{e}^{\lambda_2 t}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \\ 0 & 1 & 8\end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix}\mathbf{e}^{2t} \\ \mathbf{e}^{4t} \\ t\mathbf{e}^{4t}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & -3 & 4 \\ -2 & 2 & -3 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\mathbf{e}^{2t} \\ \mathbf{e}^{4t} \\ t\mathbf{e}^{4t}\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}4\mathbf{e}^{2t} - 3\mathbf{e}^{4t} + 4t\mathbf{e}^{4t} \\ -2\mathbf{e}^{2t} + 2\mathbf{e}^{4t} - 3t\mathbf{e}^{4t} \\ \frac{1}{4}\mathbf{e}^{2t} - \frac{1}{4}\mathbf{e}^{4t} + \frac{1}{2}t\mathbf{e}^{4t}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} &= \alpha_0(t)\mathbf{I} + \alpha_1(t)\mathbf{A} + \alpha_2(t)\mathbf{A}^2 = \alpha_0(t) \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} + \alpha_1(t) \begin{bmatrix}4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix} + \alpha_2(t) \begin{bmatrix}16 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 6 \\ 0 & 6 & 10\end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix}2\mathbf{e}^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}^{2t} + \mathbf{e}^{4t} & -\mathbf{e}^{2t} + \mathbf{e}^{4t} \\ 0 & -\mathbf{e}^{2t} + \mathbf{e}^{4t} & \mathbf{e}^{2t} + \mathbf{e}^{4t}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

**【例 2-4】** 已知线性定常系统  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  的状态转移矩阵

$$\Phi(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix}2\mathbf{e}^{-t} - \mathbf{e}^{-2t} & \mathbf{e}^{-t} - \mathbf{e}^{-2t} \\ -2\mathbf{e}^{-t} + 2\mathbf{e}^{-2t} & -\mathbf{e}^{-t} + 2\mathbf{e}^{-2t}\end{bmatrix}$$

求系统矩阵  $\mathbf{A}$ 。

**解**

**方法一** 由线性定常系统状态转移矩阵的运算性质:  $\dot{\Phi}(t) = \mathbf{A}\Phi(t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (\dot{\Phi}(t))(\Phi(t))^{-1} = (\dot{\Phi}(t))(\Phi(-t)) = \begin{bmatrix} -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \\ 2e^{-t} - 4e^{-2t} & e^{-t} - 4e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^t - e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ -2e^t + 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

方法二 由线性定常系统状态转移矩阵的运算性质:  $\dot{\Phi}(t)|_{t=0} = \mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \\ 2e^{-t} - 4e^{-2t} & e^{-t} - 4e^{-2t} \end{bmatrix} \bigg|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

【例 2-5】 线性定常系统齐次状态方程为  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ , 其中  $\mathbf{A}$  为  $2 \times 2$  维的常数阵。已知当  $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  时, 状态方程的解  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix}$ ; 当  $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$  时, 状态方程的解  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$ , 求系统状态转移矩阵  $\Phi(t)$  及系统矩阵  $\mathbf{A}$ 。

解 对应初始状态  $\mathbf{x}(0)$ , 自由运动的解为:  $\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0)$ 。由题意得

$$\begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix} = \Phi(t) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} = \Phi(t) \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{-t} \\ -e^{-2t} & -e^{-t} \end{bmatrix} = \Phi(t) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

则

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{-t} \\ -e^{-2t} & -e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{-t} \\ -e^{-2t} & -e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-t} - 2e^{-2t} \\ -e^{-t} + e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \\ \mathbf{A} &= \dot{\Phi}(t)|_{t=0} = \begin{bmatrix} -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -2e^{-t} + 4e^{-2t} \\ e^{-t} - 2e^{-2t} & e^{-t} - 4e^{-2t} \end{bmatrix} \bigg|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## 2.4 线性定常非齐次状态方程的解

线性定常系统在输入信号  $u$  作用下的运动称为强迫运动, 其可用式(2-36)所示的非齐次状态方程描述, 即

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{x}(t)|_{t=t_0} = \mathbf{x}(t_0) \end{cases} \quad (2-36)$$

下面求解非齐次状态方程式(2-36), 以研究控制作用下系统强迫运动的规律。

非齐次状态方程  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$  可改写为式(2-37), 即

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}u(t) \quad (2-37)$$

式(2-37)两边左乘  $e^{-\mathbf{A}t}$ , 得

$$e^{-A\tau}[\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t)] = e^{-A\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2-38)$$

由矩阵指数性质 1 及导数运算法则, 式(2-38)即为

$$\frac{d[e^{-A\tau}\mathbf{x}(t)]}{d\tau} = e^{-A\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2-39)$$

对式(2-39)两边在  $t_0$  到  $t$  闭区间进行积分, 得

$$e^{-A\tau}\mathbf{x}(\tau) \Big|_{t_0}^t = \int_{t_0}^t e^{-A\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (2-40)$$

$$\text{即} \quad e^{-A\tau}\mathbf{x}(t) = e^{-A\tau_0}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-A\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (2-41)$$

式(2-41)两边左乘  $e^{A\tau}$ , 由矩阵指数性质 4 及性质 3 得式(2-36)的解为

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (2-42a)$$

由式(2-11), 式(2-42a)也可写为

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t-t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (2-42b)$$

式(2-42)表明, 线性定常非齐次状态方程的解  $\mathbf{x}(t)$  由源于系统初始状态的自由运动项(即系统初始状态转移项)  $\Phi(t-t_0)\mathbf{x}(t_0)$  和源于系统控制作用的受控运动项(强迫响应)  $\int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau$  两部分构成, 这是线性系统叠加原理的体现, 而且正因为有受控项存在, 才有可能通过选择适当的输入控制信号  $\mathbf{u}$ , 达到期望的状态变化规律。

以上推导为了不失一般性, 设初始时刻  $t_0 \neq 0$ 。若特殊情况下,  $t_0 = 0$ , 对应初始状态为  $\mathbf{x}(0)$ , 则线性定常非齐次状态方程的解为

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau = \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (2-43a)$$

应用定积分的换元积分法, 式(2-43a) 也可写为

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(t-\tau) d\tau \quad (2-43b)$$

有时应用式(2-43b)求解较为方便。

事实上, 对初始时刻  $t_0 = 0$  的情况, 也可应用拉普拉斯变换法求解非齐次状态方程。对式(2-37)两边取拉普拉斯变换, 并移项整理得

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(s) \quad (2-44)$$

式(2-44)两边左乘  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$  得

$$\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s) \quad (2-45)$$

式(2-45)两边取拉普拉斯反变换得

$$\mathbf{x}(t) = L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]\mathbf{x}(0) + L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)] \quad (2-46)$$

根据式(2-16)及卷积定理, 由式(2-46)可推出式(2-43)。

**【例 2-6】** 已知线性定常系统状态方程为  $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$ , 设初始时刻  $t_0 = 0$

时  $\mathbf{x}(0)=\mathbf{0}$ , 试求  $u(t)=1(t)$  为单位阶跃函数时系统的响应。

解

方法一 应用式(2-43)直接求解(本题  $u(t)=1(t)$ , 应用式(2-43b)求解较方便)

在例 2-1 中, 已求得此系统的状态转移矩阵

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-t} - e^{-3t} & -3e^{-t} + 3e^{-3t} \\ e^{-t} - e^{-3t} & -e^{-t} + 3e^{-3t} \end{bmatrix}$$

则根据式(2-43b)得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(\tau)\mathbf{B}u(t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^t \Phi(\tau)\mathbf{B}u(t-\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \begin{bmatrix} 3e^{-\tau} - e^{-3\tau} & -3e^{-\tau} + 3e^{-3\tau} \\ e^{-\tau} - e^{-3\tau} & -e^{-\tau} + 3e^{-3\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \begin{bmatrix} -3e^{-\tau} + 3e^{-3\tau} \\ -e^{-\tau} + 3e^{-3\tau} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} -1 + 1.5e^{-t} - 0.5e^{-3t} \\ 0.5e^{-t} - 0.5e^{-3t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

方法二 应用拉普拉斯变换法求解

在例 2-1 中, 已求得

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2(s+1)} - \frac{1}{2(s+3)} & -\frac{3}{2(s+1)} + \frac{3}{2(s+3)} \\ \frac{1}{2(s+1)} - \frac{1}{2(s+3)} & -\frac{1}{2(s+1)} + \frac{3}{2(s+3)} \end{bmatrix}$$

则根据式(2-46)得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]\mathbf{x}(0) + L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}u(s)] \\ &= L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}u(s)] \\ &= L^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{3}{2(s+1)} - \frac{1}{2(s+3)} & -\frac{3}{2(s+1)} + \frac{3}{2(s+3)} \\ \frac{1}{2(s+1)} - \frac{1}{2(s+3)} & -\frac{1}{2(s+1)} + \frac{3}{2(s+3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s} \right\} \\ &= L^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{3}{2s(s+1)} + \frac{3}{2s(s+3)} \\ -\frac{1}{2s(s+1)} + \frac{3}{2s(s+3)} \end{bmatrix} \right\} = L^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{s} + \frac{3}{2(s+1)} - \frac{1}{2(s+3)} \\ \frac{1}{2(s+1)} - \frac{1}{2(s+3)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 + 1.5e^{-t} - 0.5e^{-3t} \\ 0.5e^{-t} - 0.5e^{-3t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## 2.5 线性时变系统状态方程的解

线性时变系统的结构参数随时间而变化, 其一般形式的状态方程为时变非齐次状态方程, 即

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \\ \mathbf{x}(t)|_{t=t_0} = \mathbf{x}(t_0) \end{cases} \quad (2-47)$$

式中,  $\mathbf{A}(t)$ 、 $\mathbf{B}(t)$  分别为  $n \times n$ 、 $n \times r$  维时变实值矩阵。若输入控制  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , 式(2-47)则变为时变齐次状态方程, 即

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(t)|_{t=t_0} = \mathbf{x}(t_0) \end{cases} \quad (2-48)$$

若矩阵  $\mathbf{A}$  仅为一阶, 即  $\mathbf{A}(t) = a(t)$ , 则向量-矩阵时变齐次状态方程式(2-48)变为式(2-49)所示的标量时变齐次微分方程, 即

$$\begin{cases} \dot{x} = a(t)x \\ x(t)|_{t=t_0} = x(t_0) \end{cases} \quad (2-49)$$

可应用分离变量法求解式(2-49), 即

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{x(t)} &= a(t)dt \\ \int_{t_0}^t \frac{dx(\tau)}{x(\tau)} &= \int_{t_0}^t a(\tau)d\tau \\ x(t) &= e^{\int_{t_0}^t a(\tau)d\tau} x(t_0) \end{aligned} \quad (2-50)$$

式(2-50)表明,  $x(t)$  也可视为初值  $x(t_0)$  的转移, 但时变系统与定常系统转移特性不同之处在于, 其不仅与系统特性  $a(t)$  及  $t$  有关, 而且与初始时刻  $t_0$  有关, 但与  $t$  和  $t_0$  之差无关, 即对于标量时变系统, 其状态转移函数为

$$\Phi(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t a(\tau)d\tau} \quad (2-51)$$

则标量时变齐次微分方程式(2-49)的解可表示为

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) \quad (2-52)$$

仿照标量时变齐次微分方程解的表达式(2-52), 时变齐次状态方程式(2-48)的解为

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) \quad (2-53)$$

式中,  $\Phi(t, t_0)$  为式(2-48)所描述时变系统状态转移矩阵。将式(2-53)代入式(2-48)得

$$\dot{\Phi}(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{A}(t)\Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) \quad (2-54)$$

由式(2-53)及式(2-54)可推知状态转移矩阵  $\Phi(t, t_0)$  满足如下矩阵微分方程和初始条件

$$\begin{cases} \dot{\Phi}(t, t_0) = \mathbf{A}(t)\Phi(t, t_0) \\ \Phi(t_0, t_0) = \mathbf{I} \end{cases} \quad (2-55)$$

应用经典控制理论分析时变系统较为困难, 而采用状态空间分析法的优点之一在于可将线性定常系统的求解方法推广到线性时变系统, 且应用状态转移矩阵的概念和性质, 可使时变系统的解在形式上与定常系统统一, 即自由运动均可视为初始状态的转移。应该指出, 时变系统状态转移矩阵用  $\Phi(t, t_0)$  表示, 反映其为  $t$  和  $t_0$  的函数; 但定常系统状态转移矩阵用  $\Phi(t-t_0)$  表示, 反映其为  $t-t_0$  的函数。

## 2.5.1 线性时变系统状态转移矩阵的求解

由式(2-11)可知, 线性定常系统状态转移矩阵可用矩阵指数表示, 即

$$\Phi(t-t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} = \mathbf{I} + \mathbf{A}(t-t_0) + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2(t-t_0)^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3(t-t_0)^3 + \dots$$

$$= \mathbf{I} + \int_{t_0}^t \mathbf{A} d\tau + \frac{1}{2!} \left( \int_{t_0}^t \mathbf{A} d\tau \right)^2 + \frac{1}{3!} \left( \int_{t_0}^t \mathbf{A} d\tau \right)^3 + \cdots$$

但时变系统状态转移矩阵一般不能用矩阵指数给出, 只有当  $\mathbf{A}(t)$  与  $\int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau$  满足矩阵相乘可交换条件, 即  $\mathbf{A}(t) \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau = \left( \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau \right) \mathbf{A}(t)$  成立时,  $\Phi(t, t_0)$  才可用如下矩阵指数及其幂级数展开式表示, 即

$$\Phi(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau} = \mathbf{I} + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau + \frac{1}{2!} \left( \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau \right)^2 + \frac{1}{3!} \left( \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau \right)^3 + \cdots \quad (2-56)$$

式(2-56)两边对  $t$  求导数, 得

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t, t_0) &= \mathbf{A}(t) + \frac{1}{2!} \left( \mathbf{A}(t) \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau + \left( \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau \right) \mathbf{A}(t) \right) \\ &\quad + \frac{1}{3!} \left( \mathbf{A}(t) \left( \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau \right)^2 + \left( \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau \right) \left( \mathbf{A}(t) \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau + \left( \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau \right) \mathbf{A}(t) \right) \right) + \cdots \end{aligned} \quad (2-57)$$

$$\text{若} \quad \mathbf{A}(t) \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau = \left( \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau \right) \mathbf{A}(t) \quad (2-58)$$

则由式(2-57)有

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t, t_0) &= \mathbf{A}(t) + \mathbf{A}(t) \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau + \frac{1}{2!} \mathbf{A}(t) \left( \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau \right)^2 + \cdots \\ &= \mathbf{A}(t) \left( \mathbf{I} + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau + \frac{1}{2!} \left( \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau \right)^2 + \cdots \right) = \mathbf{A}(t) \Phi(t, t_0) \end{aligned} \quad (2-59)$$

以上推导证明, 若  $\mathbf{A}(t)$  与  $\int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau$  满足矩阵相乘可交换条件式(2-58), 状态转移矩阵  $\Phi(t, t_0)$  可用式(2-56)所示的矩阵指数表示, 此时可得式(2-48)闭合形式的解为

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0) \mathbf{x}(t_0) = e^{\int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau} \mathbf{x}(t_0) \quad (2-60)$$

下面进一步分析  $\mathbf{A}(t)$  与  $\int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau$  满足矩阵相乘可交换条件对时变系统状态矩阵  $\mathbf{A}(t)$  的要求。由式(2-58)得

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t) \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau - \left( \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau \right) \mathbf{A}(t) &= \mathbf{0} \\ \text{即} \quad \int_{t_0}^t [\mathbf{A}(t) \mathbf{A}(\tau) - \mathbf{A}(\tau) \mathbf{A}(t)] d\tau &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2-61)$$

显然, 若对任意的  $t_1, t_2$ , 下式

$$\mathbf{A}(t_1) \mathbf{A}(t_2) = \mathbf{A}(t_2) \mathbf{A}(t_1) \quad (2-62)$$

成立, 则  $\mathbf{A}(t)$  与  $\int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau$  满足矩阵相乘可交换条件。

应该指出, 时变系统的系统矩阵  $\mathbf{A}(t)$  一般并不满足式(2-62), 这时  $\Phi(t, t_0)$  就不能采用简便方法求解, 通常也得不到闭合形式的  $\Phi(t, t_0)$ , 但可表示成递推形式, 采用数值计算近似求解。由式(2-55)得

$$d\Phi(t, t_0) = \mathbf{A}(t) \Phi(t, t_0) dt$$



从  $t_0$  到  $t$  对上式两边取积分,得

$$\Phi(t, t_0) = I + \int_{t_0}^t A(\tau) \Phi(\tau, t_0) d\tau \quad (2-63)$$

反复应用式(2-63),可将  $\Phi(t, t_0)$  展成无穷级数,即

$$\begin{aligned} \Phi(t, t_0) &= I + \int_{t_0}^t A(\tau) \Phi(\tau, t_0) d\tau \\ &= I + \int_{t_0}^t A(\tau) \left( I + \int_{t_0}^{\tau} A(\tau_1) \Phi(\tau_1, t_0) d\tau_1 \right) d\tau \\ &= I + \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t A(\tau) \left( \int_{t_0}^{\tau} A(\tau_1) \Phi(\tau_1, t_0) d\tau_1 \right) d\tau \\ &= I + \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t A(\tau) \left( \int_{t_0}^{\tau} A(\tau_1) \left[ I + \int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2) \Phi(\tau_2, t_0) d\tau_2 \right] d\tau_1 \right) d\tau \\ &= I + \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t A(\tau) \left( \int_{t_0}^{\tau} A(\tau_1) d\tau_1 \right) d\tau + \int_{t_0}^t A(\tau) \left( \int_{t_0}^{\tau} A(\tau_1) \left[ \int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2) \Phi(\tau_2, t_0) d\tau_2 \right] d\tau_1 \right) d\tau \\ &\quad \vdots \\ &= I + \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t A(\tau) \left( \int_{t_0}^{\tau} A(\tau_1) d\tau_1 \right) d\tau + \int_{t_0}^t A(\tau) \left( \int_{t_0}^{\tau} A(\tau_1) \left[ \int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2) d\tau_2 \right] d\tau_1 \right) d\tau + \cdots \end{aligned} \quad (2-64)$$

式(2-64)所示级数称为 Peano-Baker 级数,若  $A(t)$  的元素在积分区间有界,则该级数收敛,但难以表示成封闭形式的解析式,可根据精度要求采用数值计算方法近似求解。

## 2.5.2 线性时变系统状态转移矩阵的性质

### 1. 传递性

$$\Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1) \Phi(t_1, t_0) \quad (2-65)$$

**证明** 由时变齐次状态方程解的表达式(2-53),有

$$\begin{aligned} x(t_2) &= \Phi(t_2, t_0) x(t_0) \\ &= \Phi(t_2, t_1) x(t_1) \\ &= \Phi(t_2, t_1) \Phi(t_1, t_0) x(t_0) \end{aligned}$$

故有

$$\Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1) \Phi(t_1, t_0)$$

### 2. 可逆性

$$\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t) \quad (2-66)$$

**证明** 由式(2-65)及式(2-55),则有

$$\Phi(t_0, t) \Phi(t, t_0) = \Phi(t_0, t_0) = I, \Phi(t, t_0) \Phi(t_0, t) = \Phi(t, t) = I$$

故有

$$\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t)$$

## 2.5.3 线性时变非齐次状态方程的解

设线性时变非齐次状态方程式(2-47)的解为

$$x(t) = \Phi(t, t_0) \xi(t) \quad (2-67)$$

将式(2-67)代入式(2-47),并根据式(2-55)得

$$\dot{\Phi}(t, t_0)\xi(t) + \Phi(t, t_0)\dot{\xi}(t) = A(t)\Phi(t, t_0)\xi(t) + B(t)u(t) = \dot{\Phi}(t, t_0)\xi(t) + B(t)u(t)$$

则有

$$\Phi(t, t_0)\dot{\xi}(t) = B(t)u(t)$$

故 
$$\xi(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau, t_0)B(\tau)u(\tau)d\tau = \xi(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

上式中的  $\xi(t_0)$  可据式(2-67)、式(2-55)求得,即

$$\xi(t_0) = \Phi^{-1}(t_0, t_0)x(t_0) = x(t_0)$$

则线性时变非齐次状态方程式(2-47)的解为

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t, t_0)x(t_0) + \Phi(t, t_0) \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \\ &= \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (2-68)$$

式(2-68)表明,由于线性系统满足叠加原理,线性时变系统状态的全响应  $x(t)$  由源于系统初始状态  $x(t_0)$  的零输入响应  $\Phi(t, t_0)x(t_0)$  和源于系统输入  $u(t)$  控制作用的零状态响应  $\int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$  两部分构成。应该指出,由于通常得不到闭合形式的  $\Phi(t, t_0)$ ,故式(2-68)右边一般得不到闭合形式,需在数字计算机上根据精度要求采用数值计算方法近似计算。

**【例 2-7】** 已知线性时变齐次状态方程为  $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & t^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)$ , 求当  $t_0 = 1, x(t_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  时状态方程的解。

解

$$A(t_1)A(t_2) = \begin{bmatrix} 0 & t_1^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & t_2^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A(t_2)A(t_1)$$

即  $A(t)$  与  $\int_{t_0}^t A(\tau)d\tau$  满足矩阵相乘可交换条件,系统状态转移矩阵  $\Phi(t, t_0)$  可由式(2-56)所示的矩阵指数求得。即

$$\begin{aligned} \Phi(t, t_0) &= e^{\int_{t_0}^t A(\tau)d\tau} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \int_{t_0}^t \begin{bmatrix} 0 & \tau^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} d\tau + \frac{1}{2!} \left( \int_{t_0}^t \begin{bmatrix} 0 & \tau^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} d\tau \right)^2 + \cdots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3}(t^3 - t_0^3) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3}(t^3 - t_0^3) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

则

$$\Phi(t, 1) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3}(t^3 - 1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3}(t^3 - 1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(t^3 + 2) \\ 1 \end{bmatrix}$$

**【例 2-8】** 求线性时变系统  $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t \end{bmatrix} x(t), t_0 = 0$  的状态转移矩阵  $\Phi(t, 0)$ 。

解

$$\mathbf{A}(t_1)\mathbf{A}(t_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & t_2 \\ 0 & t_1 t_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}(t_2)\mathbf{A}(t_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & t_1 \\ 0 & t_1 t_2 \end{bmatrix}$$

可见,  $\mathbf{A}(t_1)\mathbf{A}(t_2) \neq \mathbf{A}(t_2)\mathbf{A}(t_1)$ ,  $\mathbf{A}(t)$  与  $\int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau$  不可交换, 应采用式(2-64)所示 Peano-Baker 级数表示  $\Phi(t, t_0)$ , 即

$$\begin{aligned} \Phi(t, 0) &= \mathbf{I} + \int_0^t \mathbf{A}(\tau) d\tau + \int_0^t \mathbf{A}(\tau) \left( \int_0^\tau \mathbf{A}(\tau_1) d\tau_1 \right) d\tau + \cdots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \tau \end{bmatrix} d\tau + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \tau \end{bmatrix} \left( \int_0^\tau \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \tau_1 \end{bmatrix} d\tau_1 \right) d\tau + \cdots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \tau \\ 0 & \frac{1}{2}\tau^2 \end{bmatrix} d\tau + \cdots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\tau^2 \\ 0 & \frac{1}{2}\tau^3 \end{bmatrix} d\tau + \cdots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6}t^3 \\ 0 & \frac{1}{8}t^4 \end{bmatrix} + \cdots = \begin{bmatrix} 1 & t + \frac{1}{6}t^3 + \cdots \\ 0 & 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^4 + \cdots \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**【例 2-9】** 已知线性时变系统状态空间表达式为  $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} u(t) \\ \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$ , 试求初始时刻

$t_0=0$ , 初始状态  $\mathbf{x}(t_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  时, 输入为单位阶跃信号  $u(t)=1(t)$  系统的输出响应。

解

$$\mathbf{A}(t_1)\mathbf{A}(t_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t_1 t_2 \end{bmatrix}, \mathbf{A}(t_2)\mathbf{A}(t_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t_1 t_2 \end{bmatrix}$$

可见,  $\mathbf{A}(t_1)\mathbf{A}(t_2) = \mathbf{A}(t_2)\mathbf{A}(t_1)$ , 即  $\mathbf{A}(t)$  与  $\int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau$  可交换, 则可由式(2-56)的矩阵指数求系统状态转移矩阵  $\Phi(t, t_0)$ , 即

$$\begin{aligned} \Phi(t, 0) &= e^{\int_0^t \mathbf{A}(\tau) d\tau} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tau \end{bmatrix} d\tau + \frac{1}{2!} \left( \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tau \end{bmatrix} d\tau \right)^2 + \frac{1}{3!} \left( \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tau \end{bmatrix} d\tau \right)^3 + \cdots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3!} \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix} + \cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} t^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}(t^2)^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3!} \begin{bmatrix} t^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}(t^2)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix} + \dots \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} t^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}(t^2)^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3!} \begin{bmatrix} t^3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8}(t^2)^3 \end{bmatrix} + \dots \\
&= \begin{bmatrix} 1+t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3!}t^3+\dots & 0 \\ 0 & 1+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t^2\right)^2+\frac{1}{3!}\times\left(\frac{1}{2}t^2\right)^3+\dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}t^2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

由以上计算可以看出,若  $t_0 \neq 0$ , 则

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} e^{t-t_0} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}(t^2-t_0^2)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= \Phi(t, 0)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \\
&= \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}t^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{t-\tau} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}(t^2-\tau^2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \tau \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} e^t \\ e^{\frac{1}{2}t^2} \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{t-\tau} \\ \tau e^{\frac{1}{2}(t^2-\tau^2)} \end{bmatrix} d\tau \\
&= \begin{bmatrix} e^t \\ e^{\frac{1}{2}t^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^t - 1 \\ e^{\frac{1}{2}t^2} - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^t - 1 \\ 2e^{\frac{1}{2}t^2} - 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

则系统的输出响应为

$$y = [0 \quad 1]\mathbf{x}(t) = 2e^{\frac{1}{2}t^2} - 1$$

## 2.6 离散状态方程的解

线性定常离散时间动态系统可用式(2-69)所示的离散非齐次状态方程描述,即

$$\begin{cases} \mathbf{x}(kT+T) = \mathbf{G}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}\mathbf{u}(kT) \\ \mathbf{x}(kT) |_{k=k_0} = \mathbf{x}(k_0T) \end{cases} \quad (2-69)$$

式中,  $k$  为采样序列号,  $k=k_0, k_0+1, k_0+2, \dots$ ;  $T$  为采样周期;  $\mathbf{x}(kT)$ 、 $\mathbf{u}(kT)$  分别为  $t=kT$  时刻的状态向量、输入向量。

为了书写简便,常采用  $k, k+1$  表示  $kT, kT+T$ , 将式(2-69)简写为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{x}(k) |_{k=k_0} = \mathbf{x}(k_0) \end{cases} \quad (2-70)$$

式(2-70)和线性定常连续非齐次状态方程式(2-36)相似,其揭示了线性定常离散系统和线性定常连续系统本质上的相似,读者在学习离散状态方程求解时应注意与连续系统的动态分析对照。式(2-70)可采用递推法和  $Z$  变换法求解。

### 2.6.1 递推法求解线性离散状态方程

式(2-70)的解可直接由式(2-70)采用递推法求,即

$$\mathbf{x}(k_0 + 1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k_0) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k_0)$$

$$\mathbf{x}(k_0 + 2) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k_0 + 1) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k_0 + 1) = \mathbf{G}^2\mathbf{x}(k_0) + \mathbf{G}\mathbf{H}\mathbf{u}(k_0) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k_0 + 1)$$

$$\mathbf{x}(k_0 + 3) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k_0 + 2) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k_0 + 2) = \mathbf{G}^3\mathbf{x}(k_0) + \mathbf{G}^2\mathbf{H}\mathbf{u}(k_0) + \mathbf{G}\mathbf{H}\mathbf{u}(k_0 + 1) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k_0 + 2)$$

⋮

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{G}^{k-k_0}\mathbf{x}(k_0) + \sum_{i=k_0}^{k-1} \mathbf{G}^{k-i-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(i) \quad (2-71)$$

关于以上求解作如下几点讨论:

①线性定常离散非齐次状态方程求解公式(式(2-71))与线性定常连续非齐次状态方程求解公式(式(2-42))结构相似,系统的全响应也为零输入响应与零状态响应之和,即全解  $\mathbf{x}(k)$  源于系统初始状态的自由运动项  $\mathbf{G}^{k-k_0}\mathbf{x}(k_0)$  和源于输入作用的受控运动项  $\sum_{i=k_0}^{k-1} \mathbf{G}^{k-i-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(i)$  两部分构成,但  $kT$  时刻的受控运动项只与此时刻前的输入序列  $(\mathbf{u}(i), i=k_0, k_0+1, \dots, k-1)$  有关,而与  $kT$  时刻的输入采样值  $\mathbf{u}(k)$  无关。

②式(2-71)是设初始时刻  $t_0=k_0T \neq 0$  推出的。若  $k_0=0$ ,即  $t_0=k_0T=0$ ,对应初始状态为  $\mathbf{x}(0)$ ,则线性定常离散非齐次状态方程初值问题的解为

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{G}^k\mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{G}^{k-i-1}\mathbf{H}\mathbf{u}(i) \quad (2-72)$$

③将式(2-71)、式(2-72)分别与式(2-42)、式(2-43)对照,可定义线性定常离散系统对应初始时刻  $t_0=k_0T \neq 0$ 、 $t_0=k_0T=0$  的状态转移矩阵分别为

$$\Phi(k-k_0) = \mathbf{G}^{k-k_0} \quad (2-73)$$

$$\Phi(k) = \mathbf{G}^k \quad (2-74)$$

线性定常离散系统状态转移矩阵具有和线性定常连续系统状态转移矩阵(矩阵指数)相似的运算性质,即有

$$\Phi(k+1) = \mathbf{G}\Phi(k)$$

$$\Phi(0) = \mathbf{I}$$

$$\Phi(k-k_2) = \Phi(k-k_1)\Phi(k_1-k_2), k > k_1 > k_2$$

若  $\Phi(k)$  非奇异,即  $\mathbf{G}$  非奇异,则有

$$\Phi^{-1}(k) = \Phi(-k)$$

与线性定常连续系统矩阵指数的求解方法相似,线性定常离散系统状态转移矩阵可采用直接法(据定义式(2-73)或式(2-74)求)、Z变换法、利用特征值标准型及相似变换计算、化  $\mathbf{G}^k$  为  $\mathbf{G}$  的有限项多项式计算这4种方法计算。

采用状态转移矩阵,对应初始时刻  $t_0=k_0T \neq 0$ 、 $t_0=k_0T=0$  线性定常离散非齐次状态方程初值问题的解可分别写为

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k-k_0)\mathbf{x}(k_0) + \sum_{i=k_0}^{k-1} \Phi(k-i-1)\mathbf{H}\mathbf{u}(i) \quad (2-75)$$

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k)\mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi(k-i-1)\mathbf{H}\mathbf{u}(i) \quad (2-76)$$

④递推法只能得到有限项时间序列,得不到解析解,但递推法很适合在数字计算机中进行迭

代运算,而且递推法不仅适用于解线性定常离散状态方程,同时也适用于解线性时变离散状态方程。

设  $t_0 = k_0$ ,  $T=0$ , 线性时变离散非齐次状态方程为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}(k)\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{x}(k_0) = \mathbf{x}(0) \end{cases} \quad (2-77)$$

式中,  $\mathbf{G}(k)$ 、 $\mathbf{H}(k)$  中各元素均为已知的时间函数。可采用递推法求解式(2-77)得

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{G}(0)\mathbf{x}(0) + \mathbf{H}(0)\mathbf{u}(0)$$

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{G}(1)\mathbf{x}(1) + \mathbf{H}(1)\mathbf{u}(1) = \mathbf{G}(1)\mathbf{G}(0)\mathbf{x}(0) + \mathbf{G}(1)\mathbf{H}(0)\mathbf{u}(0) + \mathbf{H}(1)\mathbf{u}(1)$$

$$\mathbf{x}(3) = \mathbf{G}(2)\mathbf{x}(2) + \mathbf{H}(2)\mathbf{u}(2) = \mathbf{G}(2)\mathbf{G}(1)\mathbf{G}(0)\mathbf{x}(0) + \mathbf{G}(2)\mathbf{G}(1)\mathbf{H}(0)\mathbf{u}(0) + \mathbf{G}(2)\mathbf{H}(1)\mathbf{u}(1) + \mathbf{H}(2)\mathbf{u}(2)$$

⋮

设  $k > k_1$ , 定义线性时变离散系统状态转移矩阵  $\Phi(k, k_1)$  为

$$\begin{aligned} \Phi(k, k_1) &= \prod_{i=k_1}^{k-1} \mathbf{G}(i) = \mathbf{G}(k-1)\mathbf{G}(k-2)\cdots\mathbf{G}(k_1+1)\mathbf{G}(k_1) \\ \Phi(k_1, k_1) &= \prod_{i=k_1}^{k_1-1} \mathbf{G}(i) = \mathbf{I} \end{aligned} \quad (2-78)$$

则式(2-77) 解的通式可写为

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k, 0)\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi(k, j+1)\mathbf{H}(j)\mathbf{u}(j) \quad (2-79)$$

## 2.6.2 Z 变换法求解线性定常离散状态方程

对线性定常离散系统状态方程式(2-70), 设  $k_0 = 0$ , 可采用 Z 变换法求得其解析解。

在  $k_0 = 0$  的初始条件下, 式(2-70)两边作 Z 变换, 得

$$\begin{aligned} z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{X}(0) &= \mathbf{G}\mathbf{X}(z) + \mathbf{H}\mathbf{U}(z) \\ \mathbf{X}(z) &= (z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}z\mathbf{X}(0) + (z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}\mathbf{H}\mathbf{U}(z) \end{aligned} \quad (2-80)$$

对式(2-80)两边取 Z 反变换, 得

$$\mathbf{x}(k) = Z^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}z]\mathbf{x}(0) + Z^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}\mathbf{H}\mathbf{U}(z)] \quad (2-81)$$

对比式(2-76)和式(2-81), 可得基于 Z 变换求线性定常离散系统状态转移矩阵解析式的方法, 即

$$\Phi(k) = \mathbf{G}^k = Z^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}z] \quad (2-82)$$

显然, 将离散系统状态方程的解代入离散系统输出方程即得离散系统的输出响应。

【例 2-10】 已知线性定常离散系统状态方程为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.2 & -0.9 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ \mathbf{x}(k_0) = \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$u(k)$  为单位脉冲序列  $1(k)$ , 即当  $k=0, 1, 2, 3, \dots$ ,  $u(k)=1$ 。求: (1) 状态转移矩阵  $\Phi(k)$ ; (2) 状态方程的解。

**解** (1) 线性定常离散系统状态转移矩阵的求解与连续系统矩阵指数相似, 可采用以下 4 种方法计算。

① 直接法 (据定义式求)

根据定义式(2-74), 得

$$\Phi(k) = G^k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.2 & -0.9 \end{bmatrix}^k$$

由上式可迭代求出各采样时刻状态转移矩阵  $\Phi(k)$  的数值解, 但得不到其封闭形式的解析式, 即

$$\Phi(1) = G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.2 & -0.9 \end{bmatrix}, \Phi(2) = \Phi(1)G = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.9 \\ 0.18 & 0.61 \end{bmatrix},$$

$$\Phi(3) = \Phi(2)G = \begin{bmatrix} 0.18 & 0.61 \\ -0.122 & -0.369 \end{bmatrix}, \dots$$

②  $Z$  变换法

$$\begin{aligned} (zI - G)^{-1} &= \begin{bmatrix} z & -1 \\ 0.2 & z+0.9 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{z+0.9}{(z+0.4)(z+0.5)} & \frac{1}{(z+0.4)(z+0.5)} \\ \frac{-0.2}{(z+0.4)(z+0.5)} & \frac{z}{(z+0.4)(z+0.5)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{5}{(z+0.4)} + \frac{-4}{(z+0.5)} & \frac{10}{(z+0.4)} + \frac{-10}{(z+0.5)} \\ \frac{-2}{(z+0.4)} + \frac{2}{(z+0.5)} & \frac{-4}{(z+0.4)} + \frac{5}{(z+0.5)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因为  $Z^{-1}\left(\frac{z}{z+a}\right) = (-a)^k$ , 故由式(2-82)得

$$\Phi(k) = G^k = Z^{-1}[(zI - G)^{-1}z] = \begin{bmatrix} 5(-0.4)^k - 4(-0.5)^k & 10(-0.4)^k - 10(-0.5)^k \\ -2(-0.4)^k + 2(-0.5)^k & -4(-0.4)^k + 5(-0.5)^k \end{bmatrix}$$

可见, 运用  $Z$  变换可求线性定常离散系统状态转移矩阵的解析式。读者可将  $k=1, 2, 3, \dots$  代入上式验证所得  $\Phi(k)$  即为直接法求出的数值解。

③ 利用特征值标准型及相似变换计算

易知  $G$  矩阵的两个特征值互异, 即  $\lambda_1 = -0.4, \lambda_2 = -0.5$ , 且  $G$  矩阵为友矩阵, 则应用 Vandermonde 矩阵可将其变换为对角阵, 即

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.4 & -0.5 \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -4 & -10 \end{bmatrix}$$

且有

$$P^{-1}GP = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -4 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.2 & -0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.4 & -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} = \Lambda$$

则对照式(2-18)有

$$\begin{aligned}
\Phi(k) &= \mathbf{G}^k = \mathbf{P}\mathbf{A}^k\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.4 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.4 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -4 & -10 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.4 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-0.4)^k & 0 \\ 0 & (-0.5)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -4 & -10 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 5(-0.4)^k - 4(-0.5)^k & 10(-0.4)^k - 10(-0.5)^k \\ -2(-0.4)^k + 2(-0.5)^k & -4(-0.4)^k + 5(-0.5)^k \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

④化  $\mathbf{G}^k$  为  $\mathbf{G}$  的有限项多项式计算

根据凯莱-哈密顿定理,对  $n$  阶方阵  $\mathbf{G}$ ,当  $k \geq n$  时,  $\mathbf{G}^k$  可用  $\mathbf{G}$  的  $(n-1)$  次多项式表示,即

$$\mathbf{G}^k = \alpha_0(k)\mathbf{I} + \alpha_1(k)\mathbf{G} + \cdots + \alpha_{n-1}(k)\mathbf{G}^{n-1}$$

式中,  $\alpha_0(k), \cdots, \alpha_{n-1}(k)$  为待定的一组关于  $k$  的标量函数,可参照连续系统的求解公式求得。本题系统矩阵  $\mathbf{G}$  的特征值为  $\lambda_1 = -0.4, \lambda_2 = -0.5$ , 则参照式(2-32)有

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \alpha_0(k) \\ \alpha_1(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1^k \\ \lambda_2^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.4 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (-0.4)^k \\ (-0.5)^k \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 10 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-0.4)^k \\ (-0.5)^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(-0.4)^k - 4(-0.5)^k \\ 10(-0.4)^k - 10(-0.5)^k \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}^k &= \alpha_0(k)\mathbf{I} + \alpha_1(k)\mathbf{G} = (5(-0.4)^k - 4(-0.5)^k) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (10(-0.4)^k - 10(-0.5)^k) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.2 & -0.9 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 5(-0.4)^k - 4(-0.5)^k & 10(-0.4)^k - 10(-0.5)^k \\ -2(-0.4)^k + 2(-0.5)^k & -4(-0.4)^k + 5(-0.5)^k \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(2)可采用递推法和  $Z$  变换法求状态方程的解

①采用递推法求状态方程的序列解,由式(2-76)有

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(0) + \mathbf{H}u(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.2 & -0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.7 \end{bmatrix} \\
\mathbf{x}(2) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(1) + \mathbf{H}u(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.2 & -0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1.7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.7 \\ -0.53 \end{bmatrix} \\
\mathbf{x}(3) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(2) + \mathbf{H}u(2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.2 & -0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.7 \\ -0.53 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.47 \\ 0.937 \end{bmatrix} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

②采用  $Z$  变换法求状态方程封闭形式的解析解

$u(k)$  为单位脉冲序列  $1(k)$ , 则  $\mathbf{U}(z) = z/(z-1)$ 。根据式(2-80),得

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}z\mathbf{X}(0) + (z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}\mathbf{H}\mathbf{U}(z)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{z+0.9}{(z+0.4)(z+0.5)} & \frac{1}{(z+0.4)(z+0.5)} \\ \frac{-0.2}{(z+0.4)(z+0.5)} & \frac{z}{(z+0.4)(z+0.5)} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} z \\ -z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{z}{z-1} \\ \frac{z}{z-1} \end{bmatrix} \right\}$$



$$= \left[ \frac{z^3 - 0.1z^2 + 2z}{(z+0.4)(z+0.5)(z-1)} \right] = \left[ \begin{array}{c} -\frac{110}{7}z + \frac{46}{3}z + \frac{29}{21}z \\ \frac{44}{7}z - \frac{23}{3}z + \frac{8}{21}z \end{array} \right]$$

则

$$\mathbf{x}(k) = Z^{-1}(\mathbf{X}(z)) = \begin{bmatrix} -\frac{110}{7}(-0.4)^k + \frac{46}{3}(-0.5)^k + \frac{29}{21} \\ \frac{44}{7}(-0.4)^k - \frac{23}{3}(-0.5)^k + \frac{8}{21} \end{bmatrix}$$

读者可将  $k=1, 2, 3, \dots$  代入上式验证所得  $\mathbf{x}(k)$  即为递推法求出的数值解。

## 2.7 连续状态方程的离散化

众所周知,数字计算机只能处理数字信号,其不仅在数值上整量化,且在时间上离散化。正是由于数字计算机的这一特点,在以下两种问题研究中需要将连续状态方程离散化,其一以数字计算机为核心的数字控制系统的分析与综合;其二以数字计算机为工具求连续状态方程的数值解。

典型的计算机数字控制系统结构框图如图 2-1 所示。

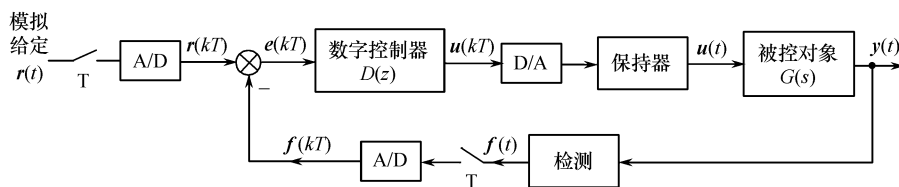


图 2-1 计算机数字控制系统结构框图

图 2-1 中,被控对象  $G(s)$  为线性定常连续系统,其状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases} \quad (2-83)$$

连续被控量  $\mathbf{y}(t)$  经检测环节的输出  $\mathbf{f}(t)$  仍为连续量,由于数字控制器不处理连续信号,应将  $\mathbf{f}(t)$  经采样和 A/D 转换成为离散数字反馈量  $\mathbf{f}(kT)$ ,而模拟给定  $\mathbf{r}(t)$  也经采样和 A/D 转换成为离散数字给定量  $\mathbf{r}(kT)$ 。 $\mathbf{r}(kT)$  减  $\mathbf{f}(kT)$  形成离散数字误差信号  $\mathbf{e}(kT)$ , $\mathbf{e}(kT)$  经数字控制器处理得到离散数字控制信号  $\mathbf{u}(kT)$ , $\mathbf{u}(kT)$  经 D/A 转换和保持器成为被控对象所需的连续控制信号  $\mathbf{u}(t)$ 。

可见,为了对计算机数字控制系统运用离散控制系统理论进行分析与综合,需要对连续被控对象离散化,由式(2-83)推出采样时刻  $t=kT$  时等效描述  $\mathbf{x}(kT)$ 、 $\mathbf{y}(kT)$  与  $\mathbf{u}(kT)$  的差分型状态空间表达式,即

$$\begin{cases} \mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{G}(T)\mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}(T)\mathbf{u}(kT) \\ \mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{D}\mathbf{u}(kT) \end{cases} \quad (2-84)$$

由于输出方程描述的是输出与状态向量和控制向量的某种线性组合,其组合关系并不因离

散化而改变,因此,离散化后输出矩阵  $\mathbf{C}$  和输入/输出关联矩阵  $\mathbf{D}$  保持不变,离散化的输出方程可直接写出。

另一方面,在已知各状态变量初始值的条件下,将连续状态方程离散化,应用数字计算机可十分容易地从初始时刻递推求出各采样时刻的状态变量值,得到连续状态方程近似数值解,从而避免数值积分方法繁琐的求解计算。事实上,连续状态方程离散化已成为连续系统离散相似法数字仿真的基础。

线性连续状态方程的离散化有求系统脉冲传递函数的频域离散化方法和时域中采样保持的离散化方法,本节只讨论时域中线性连续系统的离散化。

### 2.7.1 线性定常连续状态方程的离散化

为了将式(2-83)描述的线性定常连续系统离散化变成式(2-84)描述的等效离散系统,在系统的输入、输出端人为地加上理想采样器,且为使采样后的输入控制量  $\mathbf{u}(kT)$  复原为原来的连续信号,在输入信号采样器后加保持器,如图 2-2 所示,并假设:采用周期采样,采样周期  $T$  的选择满足 Shanon 采样定理;保持器为零阶保持器,即假设输入控制量  $\mathbf{u}(t)$  为仅在采样瞬时变化而在采样间隔内保持不变的梯形信号。

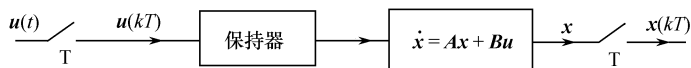


图 2-2 线性连续系统的离散化

下面考察梯形输入控制作用下式(2-83)所示线性定常连续系统如何由  $t_0 = kT$  时刻的状态  $\mathbf{x}(kT)$  转移到  $t = (k+1)T$  时刻的状态  $\mathbf{x}[(k+1)T]$ ,由此求其等效差分型状态方程中的  $\mathbf{G}(T)$  和  $\mathbf{H}(T)$ 。

由式(2-42),连续系统状态方程的解为

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

式中,令  $t_0 = kT, t = (k+1)T$ ,有

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}[(k+1)T-\tau]} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (2-85)$$

由于假设在一个采样周期内输入信号保持不变,即

$$\mathbf{u}[kT \leq t < (k+1)T] = \mathbf{u}(kT)$$

故式(2-85)中的  $\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{u}(kT)$  且可提到积分号外,并与式(2-84)中的等效差分型状态方程比较得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[(k+1)T] &= e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}(kT) + \left[ \int_{kT}^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}[(k+1)T-\tau]} \mathbf{B} d\tau \right] \mathbf{u}(kT) \\ &= \mathbf{G}(T) \mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}(T) \mathbf{u}(kT) \end{aligned} \quad (2-86)$$

式中

$$\mathbf{G}(T) = e^{\mathbf{A}T} \quad (2-87)$$

$$\mathbf{H}(T) = \int_{kT}^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}[(k+1)T-\tau]} \mathbf{B} d\tau \quad (2-88)$$

在式(2-88)中,引入新积分变量  $t = (k+1)T - \tau$ ,则原积分下限  $\tau = kT$  对应于  $t = T$ ,原积分

上限  $\tau = (k+1)T$  对应于  $t=0$ , 且  $d\tau = -dt$ , 则式(2-88)简化为

$$\mathbf{H}(T) = \int_T^0 \mathbf{e}^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}(-d\tau) = \left[ \int_0^T \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} dt \right] \mathbf{B} \quad (2-89)$$

式(2-86)、式(2-87)、式(2-89)为线性定常连续状态方程离散化公式。显然,  $\mathbf{G}(T)$  和  $\mathbf{H}(T)$  与采样周期有关, 当采样周期  $T$  确定后, 其为常数阵。

应该指出, 式(2-86)是在假定连续系统输入是零阶保持器的输出(即输入信号在一个采样周期内保持不变)的前提下推出的。若实际输入信号在一个采样周期内是变化的, 这时式(2-86)只是近似离散化公式, 为了减小误差, 在图 2-2 中可用一阶保持器取代零阶保持器(即假定在两个采样时刻之间输入信号为一斜坡函数), 重新推导式(2-85)中的积分项。需要指出, 尽管一阶保持器复现原信号的准确度较零价保持器高, 但其相角滞后较零阶保持器大, 对系统的稳定性更不利, 因此实际工程中, 一般很少使用一阶保持器, 而普遍使用零阶保持器。

## 2.7.2 线性时变连续状态方程的离散化

仿照定常系统, 线性时变连续状态方程离散化仍采用周期采样的离散方式, 采样周期为  $T$ , 同时采用零阶保持器。

设线性时变连续系统状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u} \\ \mathbf{x}(t)|_{t=t_0} = \mathbf{x}(t_0) \end{cases} \quad (2-90)$$

由式(2-68)知, 式(2-90)中的状态方程的解为

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (2-91)$$

式中, 令  $t_0 = kT$ ,  $t = (k+1)T$ , 且注意到  $\mathbf{u}[kT \leq t < (k+1)T] = \mathbf{u}(kT)$  (基于输入是零阶保持器输出的假设), 有

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[(k+1)T] &= \Phi[(k+1)T, kT]\mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi[(k+1)T, \tau]\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ &= \Phi[(k+1)T, kT]\mathbf{x}(kT) + \left\{ \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi[(k+1)T, \tau]\mathbf{B}(\tau)d\tau \right\} \mathbf{u}(kT) \\ &= \mathbf{G}(kT)\mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}(kT)\mathbf{u}(kT) \end{aligned} \quad (2-92)$$

式中

$$\mathbf{G}(kT) = \Phi[(k+1)T, kT] \quad (2-93)$$

$$\mathbf{H}(kT) = \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi[(k+1)T, \tau]\mathbf{B}(\tau)d\tau \quad (2-94)$$

式(2-92)、式(2-93)、式(2-94)即为线性时变连续状态方程离散化公式, 而输出方程的离散化可以  $t = kT$  代入式(2-90)中的连续输出方程直接得出

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}(kT)\mathbf{x}(kT) + \mathbf{D}(kT)\mathbf{u}(kT) \quad (2-95)$$

因线性连续系统的状态转移矩阵非奇异, 故式(2-87)和式(2-93)表明, 不论线性连续系统的系统矩阵  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{A}(t)$  是否非奇异, 采用采样保持的离散方式导出的等效离散化系统的系统矩阵  $\mathbf{G}(T)$  和  $\mathbf{G}(kT)$  必为非奇异。

由于线性时变连续状态方程的状态转移矩阵  $\Phi(t, t_0)$  通常得不到闭合形式的解析式, 为此在采样周期很小且计算精度要求不高的前提下, 常采用式(2-96)所示的近似离散化状态方程, 即

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{G}(kT)\mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}(kT)\mathbf{u}(kT) \approx [\mathbf{TA}(kT) + \mathbf{I}]\mathbf{x}(kT) + \mathbf{TB}(kT)\mathbf{u}(kT) \quad (2-96)$$

式(2-96)是用差商近似微商推出的, 即

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \big|_{t=kT} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}[(k+1)T] - \mathbf{x}(kT)}{(k+1)T - kT} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}[(k+1)T] - \mathbf{x}(kT)}{T} \approx \frac{\mathbf{x}[(k+1)T] - \mathbf{x}(kT)}{T}$$

又由线性时变连续系统状态方程得

$$\dot{\mathbf{x}}(kT) = \mathbf{A}(kT)\mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}(kT)\mathbf{u}(kT)$$

则有

$$\frac{\mathbf{x}[(k+1)T] - \mathbf{x}(kT)}{T} \approx \mathbf{A}(kT)\mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}(kT)\mathbf{u}(kT)$$

整理上式即得式(2-96)。可见, 采用近似离散化方法,  $\mathbf{G}(kT)$ 、 $\mathbf{H}(kT)$  分别可近似表示为

$$\mathbf{G}(kT) \approx \mathbf{I} + \mathbf{TA}(kT) \quad (2-97)$$

$$\mathbf{H}(kT) \approx \mathbf{TB}(kT) \quad (2-98)$$

显然, 采样周期越小, 近似离散化的精度越高。以上近似离散化方法显然也适用于线性定常连续系统。不过, 采用近似离散化方法得到的离散化系统矩阵并不保证是非奇异的。

【例 2-11】系统结构图如图 2-3 所示。

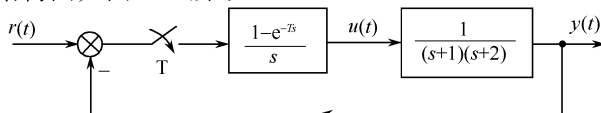


图 2-3 例 2-11 系统结构图

(1) 试求系统离散化的状态空间表达式。

(2) 试求当采样周期  $T=0.1\text{s}$ , 输入为单位阶跃函数, 且初始状态为零时的离散输出  $y(kT)$ 。

解 (1) 连续被控对象的传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

连续被控对象的状态空间表达式可按能控标准型列出, 即

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

由例 2-4 知, 上式对应的状态转移矩阵为

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

由图 2-3 知, 连续被控对象的输入是零阶保持器  $G_h(s) = (1 - e^{-Ts})/s$  的输出, 满足式(2-86)的假定前提, 则根据式(2-87)、式(2-89)得

$$\mathbf{G}(T) = e^{\mathbf{A}T} = \begin{bmatrix} 2e^{-T} - e^{-2T} & e^{-T} - e^{-2T} \\ -2e^{-T} + 2e^{-2T} & -e^{-T} + 2e^{-2T} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(T) &= \left[ \int_0^T e^{\mathbf{A}t} dt \right] \mathbf{B} = \left[ \begin{array}{cc} -2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} & -e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \end{array} \right] \bigg|_0^T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2e^{-T} + \frac{1}{2}e^{-2T} + \frac{3}{2} & -e^{-T} + \frac{1}{2}e^{-2T} + \frac{1}{2} \\ 2e^{-T} - e^{-2T} - 1 & e^{-T} - e^{-2T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-T} + \frac{1}{2}e^{-2T} + \frac{1}{2} \\ e^{-T} - e^{-2T} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

故连续被控对象的离散化状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1((k+1)T) \\ x_2((k+1)T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-T} - e^{-2T} & e^{-T} - e^{-2T} \\ -2e^{-T} + 2e^{-2T} & -e^{-T} + 2e^{-2T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -e^{-T} + \frac{1}{2}e^{-2T} + \frac{1}{2} \\ e^{-T} - e^{-2T} \end{bmatrix} u(kT) \\ y(kT) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} = x_1(kT) \end{cases}$$

由系统结构图可见,  $u(kT) = r(kT) - y(kT)$ , 又  $y(kT) = x_1(kT)$ , 则  $u(kT) = r(kT) - x_1(kT)$ , 将其代入连续被控对象的离散化状态空间表达式, 可得闭环系统离散化的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1((k+1)T) \\ x_2((k+1)T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-T} - e^{-2T} & e^{-T} - e^{-2T} \\ -2e^{-T} + 2e^{-2T} & -e^{-T} + 2e^{-2T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -e^{-T} + \frac{1}{2}e^{-2T} + \frac{1}{2} \\ e^{-T} - e^{-2T} \end{bmatrix} [r(kT) - x_1(kT)] \\ = \begin{bmatrix} 3e^{-T} - \frac{3}{2}e^{-2T} - \frac{1}{2} & e^{-T} - e^{-2T} \\ -3e^{-T} + 3e^{-2T} & -e^{-T} + 2e^{-2T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -e^{-T} + \frac{1}{2}e^{-2T} + \frac{1}{2} \\ e^{-T} - e^{-2T} \end{bmatrix} r(kT) \\ y(kT) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} = x_1(kT) \end{cases}$$

(2) 令采样周期  $T=0.1\text{s}$ , 闭环系统离散化的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1((k+1)T) \\ x_2((k+1)T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.986 & 0.086 \\ -0.258 & 0.733 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.086 \end{bmatrix} r(kT) \\ y(kT) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} = x_1(kT) \end{cases}$$

由题意,  $r(kT)$  为单位脉冲序列  $1(k)$ , 初始状态为零, 现采用递推法求状态方程的序列解为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(0.1) \\ x_2(0.1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.986 & 0.086 \\ -0.258 & 0.733 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.086 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.086 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} x_1(0.2) \\ x_2(0.2) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.986 & 0.086 \\ -0.258 & 0.733 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.086 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.086 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.017 \\ 0.148 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(0.3) \\ x_2(0.3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.986 & 0.086 \\ -0.258 & 0.733 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.017 \\ 0.148 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.086 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.034 \\ 0.190 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_1(0.4) \\ x_2(0.4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.986 & 0.086 \\ -0.258 & 0.733 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.034 \\ 0.190 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.086 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.055 \\ 0.216 \end{bmatrix}, \dots$$

则离散输出  $y(kT)$  为

$$y(0) = x_1(0) = 0, y(0.1) = x_1(0.1) = 0.005, y(0.2) = x_1(0.2) = 0.017,$$

$$y(0.3) = x_1(0.3) = 0.034, y(0.4) = x_1(0.4) = 0.055, \dots$$

事实上, 本题离散输出  $y(kT)$  也可用系统脉冲传递函数求得, 即

$$\Phi(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1+G(z)}$$

其中

$$G(z) = (1-z^{-1})Z\left(\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\right) = (1-z^{-1})Z\left(\frac{0.5}{s+2} + \frac{-1}{s+1} + \frac{0.5}{s}\right)$$

$$= \frac{z-1}{z} \left( \frac{0.5z}{z-e^{-2T}} - \frac{z}{z-e^{-T}} + \frac{0.5z}{z-1} \right) = \frac{0.5(z-1)}{z-e^{-2T}} - \frac{z-1}{z-e^{-T}} + 0.5$$

令采样周期  $T=0.1\text{s}$ , 代入得

$$G(z) = \frac{0.005z+0.004}{z^2-1.724z+0.741}$$

则

$$\Phi(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{0.005z+0.004}{z^2-1.719z+0.745}$$

又因为输入  $r(t)$  为单位阶跃函数, 则  $R(z) = z/(z-1)$ , 则

$$Y(z) = \Phi(z)R(z) = \frac{0.005z^2+0.004z}{(z^2-1.719z+0.745)(z-1)} = \frac{0.005z^2+0.004z}{z^3-2.719z^2+2.646z-0.745}$$

$$= \frac{0.005z^{-1}+0.004z^{-2}}{1-2.719z^{-1}+2.464z^{-2}-0.745z^{-3}}$$

$$= 0.005z^{-1} + 0.018z^{-2} + 0.036z^{-3} + 0.057z^{-4} + \dots$$

则离散输出  $y(kT)$  为

$$y(0) = 0, y(T) = y(0.1) = 0.005, y(2T) = y(0.2) = 0.018, y(3T) = y(0.3) = 0.036,$$

$$y(4T) = y(0.4) = 0.057, \dots$$

**【例 2-12】** 已知线性时变系统的状态方程为  $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} u(t) \\ \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$ , 输入为单位阶跃

信号  $u(t)=1(t)$ , 试采用近似离散化方法求其近似离散化状态方程及当采样周期  $T=0.1\text{s}$  时状态向量  $\mathbf{x}(t)$  在采样时刻  $kT(k=1,2,\dots)$  的近似值。

**解** 根据式(2-97)、式(2-98)有

$$\mathbf{G}(kT) \approx \mathbf{I} + T\mathbf{A}(kT) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & kT \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T+1 & 0 \\ 0 & 1+kT^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}(kT) \approx T\mathbf{B}(kT) = \begin{bmatrix} T \\ kT^2 \end{bmatrix}$$

则得近似离散化状态方程

$$\mathbf{x}[(k+1)T] \approx \begin{bmatrix} T+1 & 0 \\ 0 & 1+kT^2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(kT) + \begin{bmatrix} T \\ kT^2 \end{bmatrix} u(kT)$$

取  $T=0.1\text{s}$ , 应用递推法解以上近似离散化状态方程, 可得状态向量  $\mathbf{x}(t)$  在采样时刻的近似值, 即

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(0.1) \\ x_2(0.1) \end{bmatrix} &\approx \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_1(0.2) \\ x_2(0.2) \end{bmatrix} &\approx \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ 0 & 1.01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.01 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.42 \\ 1.02 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_1(0.3) \\ x_2(0.3) \end{bmatrix} &\approx \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.42 \\ 1.02 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.02 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.662 \\ 1.0604 \end{bmatrix} \\ &\vdots \end{aligned}$$

可以验证, 由于采样周期较小, 近似离散化的精度较高。应该指出, 对线性时变系统, 通常难以求出闭合形式的状态转移矩阵  $\Phi(t, t_0)$  的解析式, 故常采用近似离散化方法。事实上, 对难以求取  $\Phi(t, t_0)$  的线性时变连续系统, 在采样周期较小的条件下, 可采用近似方法将其离散化, 再应用递推法即可求得系统状态向量  $\mathbf{x}(t)$  在各采样时刻的近似值。

## 2.8 MATLAB 在线性系统动态分析中的应用

### 2.8.1 应用 MATLAB 计算线性定常系统的矩阵指数(状态转移矩阵)

#### 1. 应用 MATLAB 符号数学工具箱求矩阵指数闭合解析式

基于 2.3 节矩阵指数的拉普拉斯变换求解法, 可调用 MATLAB 符号数学工具箱(Symbolic Math Toolbox)中的符号运算函数先算出“预解矩阵” $[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$ , 再对“预解矩阵”进行拉普拉斯反变换即求得  $e^{\mathbf{A}t}$ 。

另外, MATLAB 符号数学工具箱中有专用于计算矩阵指数的指令 `expm()` 可调用。

**【例 2-13】** 已知  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ , 应用 MATLAB 求  $e^{\mathbf{A}t}$ 。

**解 方法一** 例 2-3 中已分别应用特征值标准形及相似变换、待定系数法求出了  $e^{\mathbf{A}t}$ , MATLAB Program 2\_1a 给出了基于拉普拉斯变换求  $e^{\mathbf{A}t}$  的 MATLAB 程序。

```
%MATLAB Program 2_1a
syms s t           %定义基本符号变量 s 和 t
A=[4,0,0;0,3,1;0,1,3];
FS=inv(s*eye(3)-A); %求预解矩阵 FS=(sI-A)^-1, eye(3)为 3×3 单位阵
eAt=ilaplace(FS,s,t); %求 e^At=L^-1[(sI-A)^-1]
eAt=simplify(eAt)   %化简 e^At 的表达式
```

关于 MATLAB Program 2\_1a 的几点说明:

①`inv()`为符号矩阵求逆指令,其与数值矩阵求逆指令在形式上无异,事实上在 MATLAB 5.x 及以上版本中的 Symbolic Math Toolbox2.1,构成符号计算的算符及基本函数在形状、名称、使用方法上与数值计算几乎完全相同;

②求时域函数  $f(t)$  的 Laplace 变换指令为: $F(s)=\text{laplace}(f(t),t,s)$ ;求频域函数  $F(s)$  的 Laplace 反变换指令为: $f(t)=\text{ilaplace}(F(s),s,t)$ ,MATLAB 6.x 中的 `Laplace()` 及 `ilaplace()` 指令能对符号函数矩阵起作用。应强调指出,正确定义基本的符号对象是正确进行符号运算的前提,故在指令调用前,应先进行符号变量  $t,s$  及符号表达式  $F(s),f(t)$  的定义。

③`simplify()`指令起化简符号计算结果表达式的作用,为了得到简化的符号计算结果表达式,常需调用该指令或同类的 `simple()` 指令。

**方法二** MATLAB Program 2\_1b 给出了调用 `expm()` 求  $e^{At}$  的 MATLAB 程序。

```
%MATLAB Program 2_1b
syms t                %定义基本符号变量 t
A=[4,0,0;0,3,1;0,1,3];
eAt=expm(A*t)
```

## 2. 应用数值矩阵的指数运算函数 `expm()` 求 $e^{At}$ 对应于 $t=t_1$ ( $t_1$ 为某一常数)的值 $e^{At_1}$

MATLAB Program 2\_2 给出了调用 `expm()` 求例 2-13 中矩阵  $A$  的矩阵指数  $e^{At}$  对应于  $t=t_1=0.1$  的值  $e^{At_1}$  的 MATLAB 程序:

```
%MATLAB Program 2_2
A=[4,0,0;0,3,1;0,1,3];
T=0.1;
eAT=expm(A*T)
```

## 3. 应用 MATLAB 符号数学工具箱求线性定常离散系统状态转移矩阵解析式

式(2-82)所示求线性定常离散系统状态转移矩阵解析式的  $Z$  变换法,可调用 MATLAB 符号工具箱中的符号运算函数编程实现。

**【例 2-14】** 已知线性定常离散系统状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.2 & -0.9 \end{bmatrix}\mathbf{x}(k)+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\mathbf{u}(k)$$

应用 MATLAB 求其状态转移矩阵  $\Phi(k)$  的解析式。

**解** 例 2-10 中已采用 4 种方法求出了系统的  $\Phi(k)$ ,MATLAB Program 2\_3 给出了基于  $Z$  变换求  $\Phi(k)$  的 MATLAB 程序:

```
%MATLAB Program 2_3
syms z k              %定义基本符号变量 z 和 k
G=[0,1;-0.2,-0.9];
Fz=(inv(z*eye(2)-G))*z; %求  $(z\mathbf{I}-\mathbf{G})^{-1}z$ 
Fk=iztrans(Fz,z,k)    %调用 Z 反变换指令求  $Z^{-1}[(z\mathbf{I}-\mathbf{G})^{-1}z]$ 
Fk=simple(Fk)          %将符号运算结果表达式转换为最简形式
```

与例 2-10 求解结果一致,MATLAB Program 2\_3 程序运行结果如下:



Fk =

$$\begin{bmatrix} 5 * (-2/5)^k - 4 * (-1/2)^k, 10 * (-2/5)^k - 10 * (-1/2)^k \\ -2 * (-2/5)^k + 2 * (-1/2)^k, -4 * (-2/5)^k + 5 * (-1/2)^k \end{bmatrix}$$

## 2.8.2 应用 MATLAB 求定常系统时间响应

### 1. 状态方程的数值解

常微分方程数值解一般使用逐步积分的方法实现,Runge-Kutta 法是应用最多的一种微分方程数值解法。MATLAB 提供的 ode23()、ode45()是分别采用 2/3 阶、4/5 阶 Runge-Kutta 法的常微分方程数值求解的函数,一般 ode45()较 ode23()运算速度快,两者调用格式相同,即

$$[t, x] = \text{ode23}('x\text{fun}', [t_0, t_f], x_0)$$

$$[t, x] = \text{ode45}('x\text{fun}', [t_0, t_f], x_0)$$

其中,xfun 为由 m 函数定义的一阶线性/非线性微分方程组的 m 函数名,该 m 函数必须以状态向量  $x$  的一阶导数为输出。若原方程为高阶微分方程,应通过第 1 章的“实现”方法将其转换为一阶微分方程组,即状态空间表达式; $t_0$  和  $t_f$  分别为积分的起始和终止时间,单位为秒; $x_0$  为状态向量的初始值; $t$  和  $x$  均为返回值,其中  $t$  为离散时间列向量; $x$  为解向量构成的矩阵,其第  $j$  列为第  $j$  个状态变量与  $t$  相对应的解向量, $j=1,2,\dots,n$ 。

【例 2-15】 已知线性定常系统状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -35 & -50 & -24 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 24]x \end{cases}$$

设  $x(0)=0$ ,试求  $u(t)=1(t)$  为单位阶跃函数时系统时间响应的数值解。

解 MATLAB Program 2\_4a 建立了描述系统状态方程的 m 函数 ode\_example.m:

```
%MATLAB Program 2_4a
%ode_example.m
function sx=ode_example(t,x) % sx 为状态列向量 x 的导数
sx(1,1)=-10 * x(1)-35 * x(2)-50 * x(3)-24 * x(4)+1; % sx 应按状态方程编写
sx(2,1)=x(1); % sx 是与 x 同维的列向量
sx(3,1)=x(2);
sx(4,1)=x(3);
```

将 MATLAB Program 2\_4a 保存为名为 ode\_example.m 的 m 文件,且将保存 ode\_example.m 的路径设置成当前路径。

MATLAB Program 2\_4b 为调用求解函数求状态方程和输出响应数值解的程序,图 2-4 所示为状态方程和输出响应数值解曲线。

```

%MATLAB Program 2_4b
x0=[0;0;0;0]; %设置初值条件
t0=0;tf=6;tspan=[t0,tf] %设置积分起始和终止时间
[t,x]=ode45('ode_example',tspan,x0); %调用求解函数求状态方程数值解
y=24 * x(:,4); %根据输出方程求输出响应的数值解
subplot(1,2,1)
plot(t,x(:,1),'k',t,x(:,2),'-r',t,x(:,3),'b',t,x(:,4),'-k')
%绘状态方程数值解曲线
subplot(1,2,2)
plot(t,y,'k')
%绘输出响应数值解曲线

```

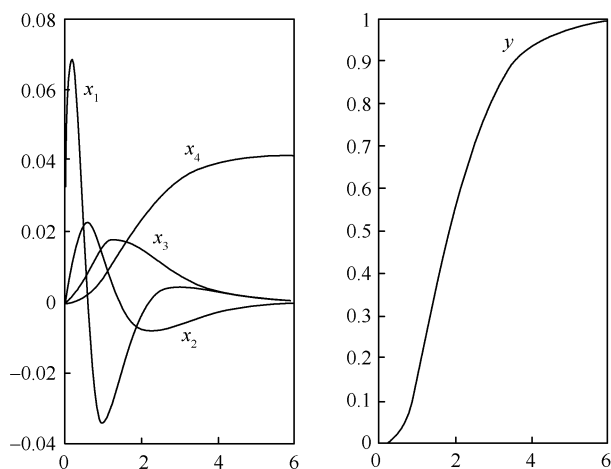


图 2-4 状态方程和输出响应数值解曲线

## 2. 状态方程的解析解

MATLAB Symbolic Math Toolbox 提供的 `dsolve()` 为求常微分方程解析解的指令,其调用格式为

$$S = \text{dsolve}('eqn1', 'eqn2', \dots)$$

其中, 'eqn1', 'eqn2', ... 为输入参数,其为描述常微分方程、初始条件及独立变量的字符表达式。微分方程是必不可少的输入参数,多个方程或初始条件可在一个输入参数内联立输入,且以逗号分隔;若独立变量默认,则小写字母  $t$  为独立变量;若要定义其他独立变量,则由全部输入参数 'eqn1', 'eqn2', ... 中的最后一个参数定义。在输入参数中,描述常微分方程规定用字符  $D$  代表对独立变量的导数(因此,用户所定义的字符变量不应含有字符  $D$ )。例如,若  $t$  为独立变量,  $y$  为  $t$  的函数,则  $Dy$  代表  $dy/dt$ ,  $D2y$  代表  $d^2y/dt^2$ ,  $D3y$  代表  $d^3y/dt^3$ , ...; 初始条件可采用形如 ' $y(a)=b$ ' 或 ' $Dy(a)=b$ ' 的字符(串)表达式给出。 $S$  为返回的存放符号微分方程解的构架数组。

**【例 2-16】** 应用 MATLAB 的 `dsolve()` 指令求解例 2-6。

**解** MATLAB Program 2\_5 为调用 `dsolve()` 求例 2-6 状态方程解析解的程序(令  $x_1 = v$ ,  $x_2 = w$ ):

```

%MATLAB Program 2_5
S=dsolve('Dv=-3*w,Dw=v-4*w+1','v(0)=0,w(0)=0'); % t 为独立变量
x1=S.v %由 S.v 援引出状态变量 v(即 x1)求解结果
x2=S.w %由 S.w 援引出状态变量 w(即 x2)求解结果

```

与例 2-6 求解结果一致, MATLAB Program 2\_5 程序运行结果如下:

```
x1 =  
    -1/2 * exp(-3 * t) + 3/2 * exp(-t) - 1  
x2 =  
    1/2 * exp(-t) - 1/2 * exp(-3 * t)
```

### 3. 基于状态空间模型的线性定常系统时域响应分析

MATLAB Control System Toolbox 提供了线性定常连续系统单位阶跃响应计算函数 `step()`、单位脉冲响应计算函数 `impulse()`、零输入响应计算函数 `initial()`、任意输入(包括系统初始状态)响应计算函数 `lsim()`, 与此对应, `dstep()`、`dimpulse()`、`dinitial()`、`dl sim()` 分别为计算线性定常离散系统单位阶跃响应、单位脉冲响应、零输入响应、任意输入(包括系统初始状态)响应的函数。若不带输出变量调用这些函数, 将在当前图形窗口中自动绘制系统输出对应的时域响应曲线; 若带输出变量调用这些函数, 可得系统输出对应的时域响应离散数据, 而不直接绘制响应曲线。

例如, 若给定线性定常连续系统、离散系统分别如式(2-83)、式(2-84)所示, 则:

执行 `step(A,B,C,D)` 指令, 可得一组单位阶跃响应曲线, 每条曲线对应于式(2-83)所示连续系统的输入/输出组合, 即在某一输入端单独施加单位阶跃信号作用下的某一输出响应, 时间向量  $t$  的范围自动设定;

执行 `step(A,B,C,D,t)` 指令与执行 `step(A,B,C,D)` 指令一样, 可得一组单位阶跃响应曲线, 但时间向量  $t$  是由用户设定的;

执行 `step(A,B,C,D,iu)` 指令, 可得式(2-83)所示连续系统从第  $i_u$  个输入到所有输出的单位阶跃响应曲线;

执行 `[y,x,t]=step(A,B,C,D,iu)` 指令, 可得式(2-83)所示连续系统从第  $i_u$  个输入到所有输出  $y$  及状态  $x$  的单位阶跃响应数据, 且返回函数自动设定的时间向量  $t$ , 但不绘制响应曲线;

执行 `dinitial(G,H,C,D,x0)` 指令可得式(2-84)所示离散系统每个输出的零输入响应曲线, 取样点数由函数自动设定;

执行 `lsim(A,B,C,D,u,t,x0)` 指令可针对系统初始状态  $x_0$  和输入  $u$  绘制系统所有输出(全)响应曲线, 其中  $t$  为用户设定的线性等间距的时间向量; 对多输入系统,  $u$  为数值矩阵, 其列数等于输入信号数, 第  $j$  个输入信号对应于  $t$  的离散序列构成  $u$  的第  $j$  列, 行数等于时间向量  $t$  的维数。

.....

限于篇幅, 时域响应分析函数功能及调用格式不再赘述, 其详情可查阅 MATLAB 的联机帮助信息。

**【例 2-17】** 设双输入双输出系统状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 25 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

且设  $u_1(t)=1(t)$ ,  $u_2(t)=1(t)$ , 系统初始状态为零。

(1) 分别求  $u_1(t)$ 、 $u_2(t)$  单独作用下系统输出响应;

(2) 求  $u_1(t)$  和  $u_2(t)$  共同作用下系统的输出响应。

解 (1) MATLAB Program 2\_6a 为调用 step() 函数求  $u_1(t)$ 、 $u_2(t)$  单独作用下系统输出响应曲线的程序, 图 2-5 所示为程序运行结果。

```
%MATLAB Program 2_6a
A=[-1,-1;25,-2];B=[1,1;0,2];
C=[1,0;0,1];D=[0,0;0,0];
step(A,B,C,D)
grid
```

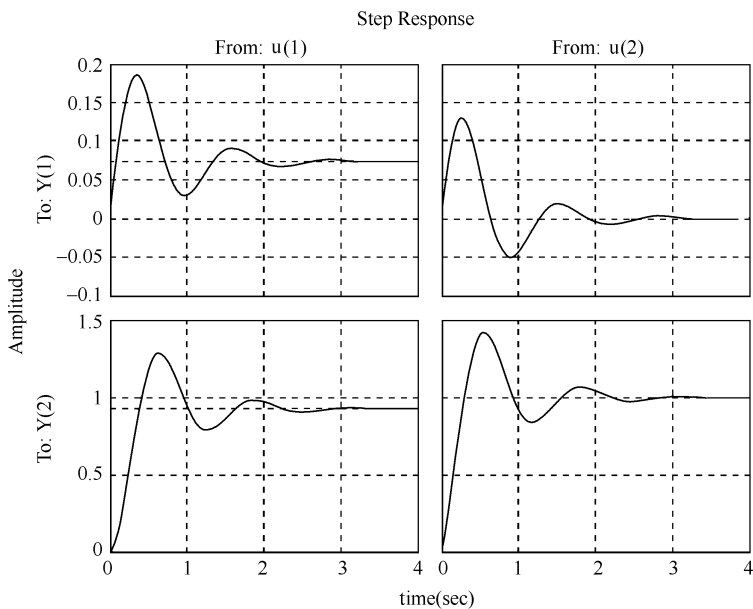


图 2-5  $u_1(t)$ 、 $u_2(t)$  单独作用下系统输出响应

(2) MATLAB Program 2\_6b 为求  $u_1(t)$  和  $u_2(t)$  共同作用下系统输出响应的 MATLAB 程序, 图 2-6 所示为程序运行结果。

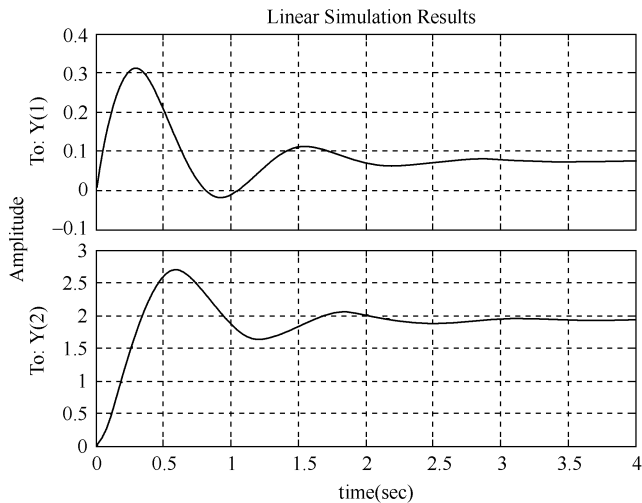


图 2-6  $u_1(t)$  和  $u_2(t)$  共同作用下系统输出响应

```

%MATLAB Program 2_6b
A=[-1,-1;25,-2];B=[1,1;0,2];
C=[1,0;0,1];D=[0,0;0,0];
t=0:0.01:4; %生成时间向量 t
LT=length(t); %求时间向量 t 的维数(长度)
u1=ones(1,LT); u2=ones(1,LT); %生成单位阶跃信号对应于向量 t 的离散序列,u1 和 u2 均为与向量 t 同维的向量
u=[u1;u2]'; % u1 和 u2 的转置分别构成 u 的第 1 列和第 2 列
lsim(A,B,C,D,u,t)
grid

```

求  $u_1(t)$  和  $u_2(t)$  共同作用下系统输出响应也可由 MATLAB Program 2\_6c 程序实现:

```

%MATLAB Program 2_6c
A=[-1,-1;25,-2];B=[1,1;0,2];C=[1,0;0,1];D=[0,0;0,0];
t=0:0.01:4;
[YY1,XX1]=step(A,B,C,D,1,t); %求 u1 单独作用下输出和状态响应数据
[YY2,XX2]=step(A,B,C,D,2,t); %求 u2 单独作用下输出和状态响应数据
y1=YY1(:,1)+YY2(:,1); %求 u1 和 u2 共同作用下输出 y1 响应数据
y2=YY1(:,2)+YY2(:,2); %求 u1 和 u2 共同作用下输出 y2 响应数据
subplot(2,1,1),plot(t,y1),ylabel('To:Y(1)'),grid
subplot(2,1,2),plot(t,y2),ylabel('To:Y(2)'),xlabel('time(sec)'),grid

```

**【例 2-18】** 应用 MATLAB 时域响应分析函数求例 2-11 中图 2-3 所示系统当采样周期  $T=0.1\text{s}$ , 输入为单位阶跃函数, 且初始状态为零时的离散输出  $y(kT)$ 。

**解** 例 2-11 已求得当采样周期  $T=0.1\text{s}$  时, 图 2-3 所示闭环系统离散状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1((k+1)T) \\ x_2((k+1)T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.986 & 0.086 \\ -0.258 & 0.733 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.086 \end{bmatrix} r(kT) \\ y(kT) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} \end{cases}$$

MATLAB Program 2\_7 为输入是单位阶跃函数, 且初始状态为零时求解上式的程序, 由此得:  $y(0)=0$ ,  $y(0.1)=0.005$ ,  $y(0.2)=0.0173$ ,  $y(0.3)=0.0348$ ,  $y(0.4)=0.0556$ ,  $y(0.5)=0.0784, \dots$

图 2-7 所示为离散输出  $y(k)$  脉冲序列波形, 其横坐标为采样周期数  $k$  (对应时间为  $kT=k \times 0.1\text{s}$ )。

```

%MATLAB Program 2_7
clear all
T=0.1; %采样周期 T=0.1s
G=[0.986 0.086;-0.258 0.733];
H=[0.005;0.086];C=[1 0];D=0;

```

```

[yd,x,n]=dstep(G,H,C,D); % yd 为输出  $y(k)$ ,  $n$  为函数自动设定的取样点数
for k=1:n
    plot([k-1,k-1],[0,yd(k)],'k') % 绘制离散输出  $y(k)$  脉冲序列波形
    hold on
end
% 绘制被控对象连续输出  $y(t)$  波形 (见图 2-7 中虚线)
e=1-yd;
for k=1:n
    for j=1:100
        u(j+(k-1)*100)=e(k);
    end
end
end
t=(0:0.01:n-0.01)*T;
[yc]=lsim([0 1;-2 -3],[0;1],[1 0],[0],u,t);
plot(t/T,yc,'k')
axis([0 30 0 0.5]), xlabel('采样周期数 k'), ylabel('y(k)')
hold off

```

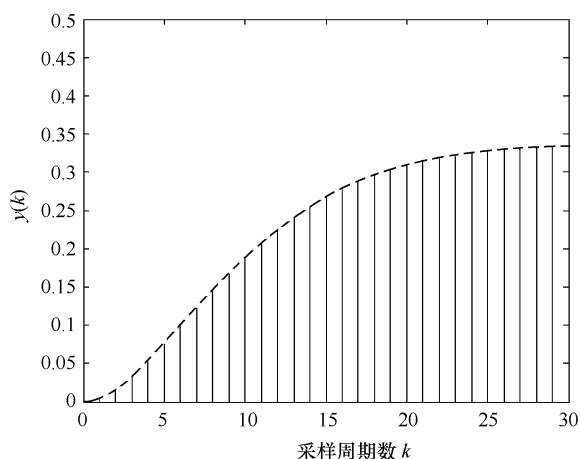


图 2-7 离散输出  $y(k)$  脉冲序列波形

### 2.8.3 应用 MATLAB 变连续状态空间模型为离散状态空间模型

MATLAB Control System Toolbox 提供的 `c2d()` 函数可简化线性定常连续状态方程离散化系数矩阵的求解, 若要将式(2-83)所示的线性定常连续系统变换为式(2-84)所示的离散系统, 且设控制输入端采用零阶保持器,  $T$  为采样周期, 其调用格式为

$$[G, H] = c2d(A, B, T)$$

**【例 2-19】** 应用 MATLAB 的 `c2d()` 指令求解例 2-11 中连续被控对象的离散化状态方程。

**解** MATLAB Program 2\_8a 为求例 2-11 连续被控对象离散化系数矩阵的程序:

```
%MATLAB Program 2_8a
syms T %定义基本符号变量 T(采样周期)
A=[0,1;-2,-3];
B=[0;1];
[G,H]=c2d(A,B,T)
```

若要求例 2-11 连续被控对象在采样周期  $T=0.1\text{s}$  时的离散化状态方程,程序为 MATLAB Program 2\_8b:

```
%MATLAB Program 2_8b
T=0.1;
A=[0,1;-2,-3];
B=[0;1];
[G,H]=c2d(A,B,T)
```

MATLAB Control System Toolbox 还提供了比  $\text{c2d}()$  功能更强的  $\text{c2dm}()$  函数,用户在调用  $\text{c2dm}()$  时可选择不同的离散变换方式(例如在变换中,输入端采用零阶保持器或一阶保持器,或采用双线性(Tustin)逼近导数等),将连续状态空间模型变换为离散状态空间模型,以提高离散化的精度。有关  $\text{c2dm}()$  的功能及调用格式的详情可通过 MATLAB 的联机帮助查阅。

与其他变换类似, $\text{d2c}()$ 、 $\text{d2cm}()$  分别为  $\text{c2d}()$ 、 $\text{c2dm}()$  的逆过程,其完成从离散时间系统到连续时间系统的变换。例如,若要将式(2-84)所示的线性定常离散系统变换为式(2-83)所示的连续系统,且设控制输入端采用零阶保持器, $T$  为采样周期,其调用格式为

$$[A,B]=\text{d2c}(G,H,T)$$

## 小 结

在基于状态空间模型对线性系统运动进行定量分析(即求解线性系统状态方程)的研究中,状态转移矩阵是一个十分重要的概念,其包含系统自由运动的全部信息。线性系统无论是定常还是时变、连续还是离散,其状态全响应(即非齐次状态方程的解)均可分解为零输入时初始状态的转移和零状态时输入信号  $u(t)$  作用下的状态转移(参见式(2-42)、式(2-68)、式(2-75)、式(2-79))。状态转移矩阵的性质和求解是本章的重点内容。

对线性定常连续系统,状态转移矩阵  $\Phi(t-t_0)$  即系统矩阵  $A$  的矩阵指数  $e^{A(t-t_0)}$  为  $(t-t_0)$  的函数。本章介绍了矩阵指数的重要运算性质(分解性、可逆性、传递性等)和 4 种计算矩阵指数  $e^A$  的方法(级数展开法、拉普拉斯变换法、利用特征值标准形及相似变换计算、化为  $A$  的有限项多项式计算)。线性定常离散系统状态转移矩阵  $\Phi(k)$  有与连续系统  $e^A$  相似的运算性质,且与  $e^A$  计算方法对应, $\Phi(k)$  也有直接法(据定义式)、 $Z$  变换法等 4 种计算方法。

对线性时变连续系统,状态转移矩阵  $\Phi(t,t_0)$  为  $t$  和  $t_0$  的函数,一般难以表达成封闭形式的解析式,本章介绍了计算  $\Phi(t,t_0)$  的逐次逼近法(Peano-Baker 级数)。对线性时变离散系统,可采用递推法求其状态方程的数值解。

鉴于数字计算机控制系统分析、综合及以数字计算机为工具采用递推法求连续状态方程数值解的需要,本章介绍了时域中采样保持的连续状态方程离散化方法及近似离散化方法。

工程上常应用计算机求解状态方程,本章介绍了 MATLAB 在线性系统动态分析中的应用。

## 思考题与习题 2

2-1 设线性定常系统齐次状态方程为:  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ , 证明:

$$(1) \mathbf{A} \int_0^t e^{\mathbf{A}\tau} d\tau = e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{I} \quad (2) \mathbf{x}(t_2) = e^{\mathbf{A}(t_2-t_1)} \mathbf{x}(t_1)$$

2-2 设  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  为同维方阵, 在什么条件下才有  $e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} = e^{\mathbf{A}t} e^{\mathbf{B}t} = e^{\mathbf{B}t} e^{\mathbf{A}t}$ ?

2-3 设系统矩阵  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}$ , 试证明:  $e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix}$ 。

2-4 设系统矩阵  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$ , 试引用上题的结论和矩阵指数运算性质, 证明:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\sigma t} \cos\omega t & e^{\sigma t} \sin\omega t \\ -e^{\sigma t} \sin\omega t & e^{\sigma t} \cos\omega t \end{bmatrix}$$

2-5 求证定常矩阵微分方程

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{B}, \mathbf{X}(0) = \mathbf{Q}$$

的解阵为

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{Q} e^{\mathbf{B}t}$$

其中,  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Q}$  为  $n \times n$  维常数矩阵,  $\mathbf{X}$  为  $n \times n$  维变量矩阵。

2-6 设  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , 其中  $ad = bc$ , 试应用凯莱-哈密顿定理验证

$$\mathbf{A}^{100} = (a+d)^{99} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

2-7 判断下列矩阵是否满足状态转移矩阵的条件, 若满足, 试求与之对应的系统矩阵  $\mathbf{A}$ 。

$$(1) \Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & -2e^{-t} + 2e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \quad (2) \Phi(t) = \begin{bmatrix} 6e^{-t} - 5e^{-2t} & 4e^{-t} - 4e^{-2t} \\ -3e^{-t} + 3e^{-2t} & -2e^{-t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$(3) \Phi(t) = \begin{bmatrix} 4e^{-t} - 3e^{-2t} & 4e^{-t} - 4e^{-2t} \\ -3e^{-t} + 3e^{-2t} & -3e^{-t} + 4e^{-2t} \end{bmatrix} \quad (4) \Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} - 2te^{-t} & 4te^{-t} \\ -te^{-t} & e^{-t} + 2te^{-t} \end{bmatrix}$$

2-8 用 4 种方法计算以下矩阵  $\mathbf{A}$  的矩阵指数  $e^{\mathbf{A}t}$ 。

$$(1) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad (2) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (3) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad (4) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2-9 求以下矩阵  $\mathbf{A}$  的矩阵指数  $e^{\mathbf{A}t}$ 。

$$(1) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad (2) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{bmatrix} \quad (3) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

$$(4) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (5) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (6) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$



2-10 线性定常系统齐次状态方程为:  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ , 其中  $\mathbf{A}$  为  $2 \times 2$  的常数阵。已知当  $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$  时, 状态方程的解  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -2e^{-2t} \end{bmatrix}$ ; 当  $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  时, 状态方程的解  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$ , 求系统状态转移矩阵  $\Phi(t)$  及系统矩阵  $\mathbf{A}$ 。

2-11 设线性定常系统齐次状态方程为:  $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}$ , 已知  $t=1\text{s}$  时的状态为  $\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 0.1353 \\ -0.1353 \end{bmatrix}$ , 求  $t=0, 2\text{s}$  及  $3\text{s}$  时的状态  $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(2), \mathbf{x}(3)$ 。

2-12 已知系统状态方程为  $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$ ,  $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , 试求  $u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-t}, & t \geq 0 \end{cases}$  时系统的响应。

2-13 求下列线性时变系统的状态转移矩阵  $\Phi(t, 0)$ 。

$$(1) \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2t \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (2) \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (3) \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -2t & 1 \\ 1 & -2t \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

2-14 既然线性系统的自由运动均可视为初始状态的转移, 为什么线性定常齐次状态方程状态转移矩阵用  $\Phi(t-t_0)$  表示, 而线性时变齐次状态方程状态转移矩阵却用  $\Phi(t, t_0)$  表示?  $\Phi(t-t_0)$  和  $\Phi(t, t_0)$  有何区别?

2-15 求线性时变系统  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -e^{-t} \\ e^{-t} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$  的状态转移矩阵  $\Phi(t, 0), \Phi(t, t_0)$ 。

2-16 已知线性定常离散系统状态空间表达式为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.125 \\ 0.125 & 0.5 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} \\ y(k) = [1 \quad 3] \mathbf{x}(k) \end{cases}$$

设  $\mathbf{x}(k_0) = \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ,  $u_1(k)$  为函数  $t$  的采样序列,  $u_2(k)$  为函数  $e^{-t}$  的同步采样序列。求:

(1) 状态转移矩阵  $\Phi(k)$ ; (2) 状态方程的解及输出响应。

2-17 已知线性定常离散系统差分方程为

$$y(k+2) + 3y(k+1) + 2y(k) = 2u(k+1) + 3u(k)$$

设  $u(k)$  为单位阶跃序列, 即  $u(k) = 1$ , 初始条件为  $y(0) = 1, y(1) = 1$ , 试:

(1) 分别采用迭代解法和  $Z$  变换法解差分方程, 求系统输出响应;

(2) 求离散系统状态空间表达式, 并通过求解离散状态方程求系统输出响应。

2-18 已知线性定常连续系统状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0] \mathbf{x} \end{cases}$$

取采样周期  $T=1\text{s}$ , 试求其离散化状态空间表达式。

2-19 线性时变系统状态方程为  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 5(1-e^{-5t}) \\ 0 & 5e^{-5t} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 5e^{-5t} \\ 5(1-e^{-5t}) \end{bmatrix} u$ 。

(1) 求采样周期为  $0.1\text{s}$  时, 系统近似离散状态方程;

(2) 若  $u(t) = 1(t)$ ,  $x_1(0) = 0$ ,  $x_2(0) = 0$ , 求状态向量  $\mathbf{x}(t)$  在采样时刻  $kT$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) 的值。

2-20 系统结构图如图 2-8 所示。

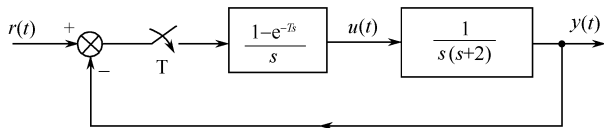


图 2-8 题 2-18 图

(1) 求系统离散化的状态空间表达式; (2) 若采样周期  $T = 0.1\text{s}$ , 输入为单位阶跃函数, 且初始状态为零, 求离散输出  $y(kT)$ 。

## 上机实验题 2

2-1 已知系统状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -7.7667 & -7.4333 & -0.6667 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \quad 333.3333 \quad 66.6667] \mathbf{x} \end{cases}$$

试应用 MATLAB: (1) 求系统的状态转移矩阵  $\Phi(t)$ ; (2) 求系统阶跃响应的解析解; (3) 分别使用解微分方程方法、控制工具箱、SIMULINK 求系统阶跃响应的数值解及阶跃响应曲线 (包括状态响应和输出响应)。

2-2 已知系统状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{cases}$$

试应用 MATLAB: (1) 设  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $x_3(0) = 0$ , 求系统零输入状态响应和输出响应; (2) 设初态为零, 求系统分别在  $u_1(t) = 1(t)$ 、 $u_2(t) = 1(t)$  单独作用下的状态响应和输出响应; (3) 在 (1) 中的初态下, 且设  $u_1(t) = 1(t)$ ,  $u_2(t) = 1(t)$ , 求系统状态全响应和输出全响应。

2-3 已知连续系统状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -200 & -30 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [400 \quad 0 \quad 0] \mathbf{x} \end{cases}$$

试应用 MATLAB: (1) 求系统离散化后的状态空间表达式; (2) 设采样周期为  $T = 0.2\text{s}$ , 求离散系统状态转移矩阵。

2-4 系统结构如图 2-9 所示,其中, $K=10$ ,采样周期  $T=0.2\text{s}$ , $r(t)=1(t)+t+\frac{1}{2}t^2$ ,系统初始状态为零。

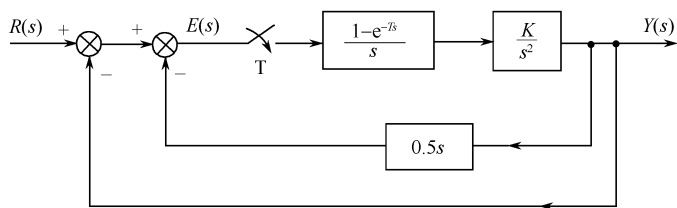


图 2-9 上机实验题 2-4 图

试应用 MATLAB,求:(1)闭环系统离散化的状态空间表达式;(2)离散输出  $y(kT)$ 、离散误差  $e(kT)$  脉冲序列波形及系统稳态误差;(3)分析离散系统稳定性与采样周期的关系,并通过仿真实验验证分析结论。

## 第3章 线性系统的能控性和能观测性分析

### 3.1 引言

在控制工程中,有两个问题经常引起设计者的关心,其一是加入适当的控制作用后,能否在有限时间内将系统从任一初始状态转移到希望的状态上,即系统是否具有通过控制作用随意支配状态的能力;其二是通过在一段时间内对系统输出的观测,能否判断系统的初始状态,即系统是否具有通过观测系统输出来估计状态的能力。这便是线性系统的能控性与能观测性问题。

在经典控制理论中,用微分方程或传递函数描述系统的输入、输出特性,输出量即为被控量,只要系统是因果系统并且是稳定的,输出量便可以受控,且实际物理系统的输出量一般是能观测到的,因而不存在输入能否控制输出和输出能否观测的问题。现代控制理论中,用状态方程和输出方程描述系统,输入和输出构成系统的外部变量,而状态变量为系统的内部变量,这就存在着系统内所有状态变量是否可受输入影响和是否可由输出反映的问题。如果系统所有状态变量的运动都可以由输入来影响和控制而由任意的初态达到原点,则系统的状态就是完全能控的,简称系统能控。否则,就称系统是不完全能控的,简称系统不能控。相应地,如果系统所有状态变量的任意形式的运动均可由输出完全反映,则称系统的状态是完全能观测的,简称系统能观(测)。否则称系统的状态是不完全能观测的,简称系统不能观(测)。稳定性、能控性与能观测性均是系统的重要结构性质。

能控性与能观测性是20世纪60年代由卡尔曼首先系统提出的,是现代控制理论用状态空间描述系统引申出来的重要概念。它不仅是线性系统分析与综合问题研究中必不可少的概念,而且也是最优控制、最优估计的设计基础。本章首先介绍能控性与能观测性的概念及定义,在此基础上,介绍判别线性连续系统和离散系统能控性与能观测性的准则及能控性与能观测性的对偶原理,讨论如何通过线性非奇异变换将能控系统和能观测系统的状态空间表达式化为能控标准型和能观测标准型、能控性及能观测性与传递函数的关系,以及如何对不能控和不能观测系统进行结构分解。其次,讨论MIMO线性连续系统传递函数矩阵的实现及最小实现问题。本章最后介绍MATLAB在系统能控性与能观测性分析中的应用。

### 3.2 能控性与能观测性的概念与示例

首先举几个例子来直观地说明能控性与能观测性的物理概念。

**【例 3-1】** 给定系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u \\ y = [7 \quad -6] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3-1)$$

其状态变量图如图3-1所示。由图可见,状态变量 $x_1$ 和 $x_2$ 均受输入 $u$ 影响,因而系统状态完全能控,输出 $y$ 包含状态变量 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 的信息,所以系统状态完全能观测。

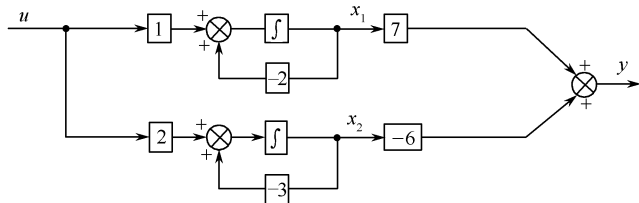


图 3-1 例 3-1 系统状态变量图

【例 3-2】 桥式电路如图 3-2 所示,选取电感  $L$  的电流  $i(t) = x(t)$  为状态变量,  $u(t)$  为输入,输出为  $y(t)$ 。由电路定律,可得该平衡电桥系统的状态方程为

$$\dot{x} = -\frac{R}{L}x$$

可见,电感  $L$  中的电流是自由衰减的,即  $u(t)$  不能控制  $x(t)$  的变化,故系统状态为不能控。若  $u(t) = 0$ ,则不论电感  $L$  中的初始电流  $x(t_0)$  为何值,对所有时刻  $t \geq t_0$  都恒有  $y(t) = 0$ ,即状态  $x(t)$  不能由输出  $y(t)$  反映,故系统是状态不能观测的。由此可见,该电路为状态既不能控也不能观测系统。

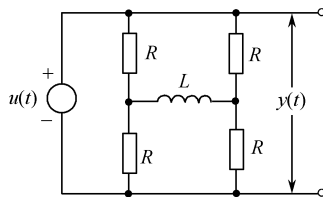


图 3-2 状态不能控、不能观测电路

【例 3-3】 如图 3-3 所示电路,选取状态变量  $x_1 = u_{C1}$ ,  $x_2 = u_{C2}$ ,输出  $y = x_2$ ,设  $R_1 = R_2$ ,  $C_1 = C_2$ 。由于两条并联阻容支路具有相同的时间常数和强迫响应,仅当初始状态  $x_1(t_0) = x_2(t_0)$  时,输入  $u(t)$  才能够在有限时间内将  $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$  同时转移到原点。若  $x_1(t_0) \neq x_2(t_0)$ ,则不论  $u(t)$  取为何种形式,都不能将  $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$  在有限时间内同时转移到原点。换言之,输入  $u(t)$  能够将状态平面中位于  $x_2 = x_1$  直线上的状态同时转移到任意相同的目标值,而不能将位于  $x_2 = x_1$  直线外的状态同时转移到任意相同的目标值,这表明此电路不完全能控。由于  $y = x_2 = x_1$ ,故能观测。

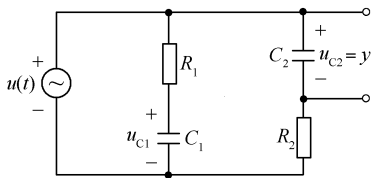


图 3-3 例 3-3 电路

【例 3-4】 如图 3-4 所示电路,选择电流  $i_1$ 、 $i_2$  为状态变量,并令  $x_1 = i_1$ ,  $x_2 = i_2$ ,指定  $y(t)$  为输出。若输入  $u(t) = 0$ ,则当状态初值  $x_1(t_0) = x_2(t_0)$  时,不论其值取多少,对于所有时刻  $t \geq t_0$ ,都有电流  $i(t) \equiv 0$ ,即输出  $y(t) \equiv 0$ ,因此,由输出  $y(t)$  不能确定  $x_1(t_0)$ 、 $x_2(t_0)$ ,故图 3-4 电路为不完全能观测。

应当指出,上述对能控性和能观测性仅进行了直观和不严密的分析说明,这有助于建立物理概念,但对于维数更高、更复杂的系统,基于直观分析的能控性、能观性判断将面临困难。下面给出系统状态能控性、能观性的严格定义,在此基础上,导出相应的判断准则,以用于分析、判断更为一般和更为复杂的系统。

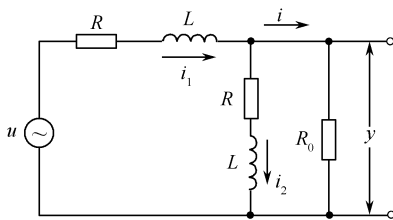


图 3-4 不能观测电路

### 3.3 能控性和能观测性定义

#### 3.3.1 能控性定义

线性时变连续系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, t \in T_d \quad (3-2)$$

式中,  $\mathbf{x}$  为  $n$  维状态向量,  $\mathbf{u}$  为  $r$  维输入向量,  $T_d$  为时间定义区间,  $\mathbf{A}(t)$  和  $\mathbf{B}(t)$  分别为  $n \times n$  维和  $n \times r$  维矩阵。下面分别对状态能控、系统能控和不能控进行定义。

### 1. 状态能控

对于式(3-2)所示线性时变连续系统, 如果对指定初始时刻  $t_0 \in T_d$  的一个非零初始状态  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , 存在一个时刻  $t_f \in T_d, t_f > t_0$  和一个无约束的容许控制  $\mathbf{u}(t), t \in [t_0, t_f]$ , 使状态由  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  转移到  $t_f$  时的  $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{0}$ , 则称此  $\mathbf{x}_0$  是在  $t_0$  时刻能控的。

应该指出, 以上将能控性规定为由非零状态转移到零状态, 只是为了定义方便, 其揭示的是内部状态在输入  $\mathbf{u}(t)$  控制下能任意转移的属性。

### 2. 系统能控

对于式(3-2)所示线性时变连续系统, 指定初始时刻  $t_0 \in T_d$ , 如果状态空间的所有非零状态都是在  $t_0$  时刻能控的, 则称系统在时刻  $t_0$  是状态完全能控的, 简称系统在时刻  $t_0$  能控。如果系统对于任意的  $t_0 \in T_d$  均是状态完全能控的(即系统的能控性与初始时刻  $t_0 \in T_d$  的选取无关), 则称系统是一致能控的。

### 3. 系统不完全能控

对于式(3-2)所示线性时变连续系统, 指定初始时刻  $t_0 \in T_d$ , 如果状态空间存在一个或一个以上非零状态在时刻  $t_0$  是不能控的, 则称系统在时刻  $t_0$  是状态不完全能控的, 简称系统不能控。

在上述状态能控的定义中, 只要求系统在可找到的控制  $\mathbf{u}(t)$  的作用下, 使  $t_0$  时刻的非零状态  $\mathbf{x}_0$  在  $T_d$  上的一段有限时间内转移到状态空间坐标原点, 但未限制和规定状态转移的轨迹。所以, 能控性是表征系统状态运动的一个定性性质。定义中并未限制控制  $\mathbf{u}(t)$  的每个分量的幅值, 只要求是容许控制, 即每个分量  $u_j(t) (j=1, 2, \dots, r)$  均在时间区间  $T_d$  上绝对平方可积, 即

$$\int_{t_0}^{t_f} |u_j(t)|^2 dt < \infty \quad t_0, t \in T_d$$

对线性时变连续系统而言, 其能控性与初始时刻  $t_0$  的选取有关, 故其能控性是针对  $T_d$  中的一个取定时刻  $t_0$  来定义的。而线性定常连续系统, 其能控性与初始时刻  $t_0$  的选取无关, 即状态或系统的能控性不从属于  $t_0$ , 故线性定常连续系统其系统能控性可定义为: 对于任意的初始时刻  $t_0 \in T_d$  (一般取  $t_0 = 0$ ), 存在一个有限时刻  $t_f \in T_d, t_f > t_0$  和一个无约束的容许控制  $\mathbf{u}(t), t \in [t_0, t_f]$ , 能使状态空间的任意非零状态  $\mathbf{x}(t_0)$  转移到  $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{0}$ , 则称系统状态完全能控, 简称系统能控。

### 4. 状态与系统能达

对于式(3-2)所示线性时变系统, 若存在能将状态  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$  转移到  $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$  的控制作用  $\mathbf{u}(t), t \in [t_0, t_f]$ , 则称状态  $\mathbf{x}_f$  是  $t_0$  时刻能达的。若  $\mathbf{x}_f$  对所有时刻都是能达的, 则称状态  $\mathbf{x}_f$  为完全能达或一致能达。若系统对于状态空间中的每个状态都是时刻  $t_0$  能达的, 则称系统是  $t_0$  时刻状态能达的, 简称系统是时刻  $t_0$  能达的。

有文献称能控系统的状态具有达原点能控性, 而称能达系统的状态具有离原点能控性。对线性定常连续系统, 能控性与能达性是等价的。

## 3.3.2 能观测性定义

能观测性表征状态可由输出完全反映的性能, 故应考察系统的状态方程和输出方程。设线性时变系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad t_0, t \in T_d \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u} \end{cases} \quad (3-3)$$

式中,  $\mathbf{x}$  为  $n$  维状态向量,  $\mathbf{u}$  为  $r$  维输入向量,  $\mathbf{y}$  为  $m$  维输出向量,  $\mathbf{A}(t)$ ,  $\mathbf{B}(t)$ ,  $\mathbf{C}(t)$  和  $\mathbf{D}(t)$  分别为  $n \times n$ ,  $n \times r$ ,  $m \times n$  和  $m \times r$  维的满足状态方程解的存在唯一性条件的时变矩阵。式(3-3)状态方程的解为

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0) \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (3-4)$$

式中,  $\Phi(t, t_0)$  为系统的状态转移矩阵。则系统的输出响应为

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t) \Phi(t, t_0) \mathbf{x}_0 + \mathbf{C}(t) \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau + \mathbf{D}(t) \mathbf{u}(t) \quad (3-5)$$

令输入  $\mathbf{u}(t)$  引起的等价状态为

$$\zeta(t) = \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (3-6)$$

$$\text{则} \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t) \Phi(t, t_0) \mathbf{x}_0 + \mathbf{C}(t) \Phi(t, t_0) \zeta(t) + \mathbf{D}(t) \mathbf{u}(t) \quad (3-7)$$

$$\text{令} \quad \bar{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}(t) \Phi(t, t_0) \zeta(t) + \mathbf{D}(t) \mathbf{u}(t) \quad (3-8)$$

$$\text{则} \quad \mathbf{y}(t) - \bar{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}(t) \Phi(t, t_0) \mathbf{x}_0 \quad (3-9)$$

能观测性研究输出  $\mathbf{y}(t)$  反映状态向量  $\mathbf{x}(t)$  的能力, 研究时输出  $\mathbf{y}(t)$  和输入  $\mathbf{u}(t)$  均设为已知, 而初始状态  $\mathbf{x}_0$  未知。由于  $\mathbf{u}(t)$  已知, 则  $\bar{\mathbf{y}}(t)$  可据式(3-6)、式(3-8)计算得出, 即可认为  $\bar{\mathbf{y}}(t)$  也是已知的, 因此式(3-9)表明, 能观测性即是  $\mathbf{x}_0$  可由  $\mathbf{y}(t) - \bar{\mathbf{y}}(t)$  完全估计的性能。由于  $\mathbf{x}(t)$  可任意取值, 为了叙述简单, 不妨令  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , 则  $\bar{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0) \mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t) = \mathbf{C}(t) \Phi(t, t_0) \mathbf{x}_0$ 。于是在分析系统能观测性问题时, 只需从系统的齐次状态方程和输出方程出发, 即

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \mathbf{x} & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad t_0, t \in T_d \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}(t) \mathbf{x} \end{cases} \quad (3-10)$$

下面基于式(3-10)给出状态、系统能观测性的有关定义。

### 1. 状态能观测

对于式(3-10)所示线性时变连续系统, 如果取定初始时刻  $t_0 \in T_d$ , 存在一个有限时刻  $t_f \in T_d$ ,  $t_f > t_0$ , 对于所有的  $t \in [t_0, t_f]$ , 系统的输出  $\mathbf{y}(t)$  能唯一确定一个非零的初始状态向量  $\mathbf{x}_0$ , 则称此非零状态  $\mathbf{x}_0$  在  $t_0$  时刻是能观测的。

### 2. 系统能观测

对于式(3-10)所示线性时变连续系统, 如果指定初始时刻  $t_0 \in T_d$ , 存在一个有限时刻  $t_f \in T_d$ ,  $t_f > t_0$ , 对于所有  $t \in [t_0, t_f]$ , 系统的输出  $\mathbf{y}(t)$  能唯一确定  $t_0$  时刻的任意非零的初始状态向量  $\mathbf{x}_0$ , 则称系统在  $t_0$  时刻状态是完全能观测的, 简称系统能观测。如果系统对于任意  $t_0 \in T_d$  均是能观测的(即系统的能观测性与初始时刻  $t_0 \in T_d$  的选取无关), 则称系统是一致完全能观测的。

### 3. 系统不能观测

对于式(3-10)所示线性时变连续系统, 如果取定初始时刻  $t_0 \in T_d$ , 存在一个有限时刻  $t_f \in T_d$ ,  $t_f > t_0$ , 对于所有  $t \in [t_0, t_f]$ , 系统的输出  $\mathbf{y}(t)$  不能唯一确定  $t_0$  时刻的任意非零的初始状态向量  $\mathbf{x}_0$  (即至少有一个状态的初值不能被确定), 则称系统在  $t_0$  时刻是状态不完全能观测的, 简称系统不能观测。

线性定常连续系统其能观测性与初始时刻  $t_0$  的选取无关。

应该指出, 在能观测性定义中, 之所以将能观测性规定为对初始状态向量  $\mathbf{x}_0$  的确定, 是因为一旦确定了  $\mathbf{x}_0$ , 则可根据给定的输入  $\mathbf{u}(t)$ , 利用状态转移方程求出系统在各个瞬时的状态。

### 3.4 线性连续系统能控性判据

#### 3.4.1 线性定常连续系统能控性判据

##### 1. 秩判据

设线性定常连续系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (3-11)$$

式中,  $\mathbf{x}$  为  $n$  维状态向量,  $\mathbf{u}$  为  $r$  维输入向量,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  分别为  $n \times n$ ,  $n \times r$  维常数阵。

式(3-11)系统状态完全能控的充分必要条件是能控性判别矩阵

$$\mathbf{Q}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (3-12)$$

满秩, 即

$$\text{rank} \mathbf{Q}_c = \text{rank} [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = n \quad (3-13)$$

**证明** 设系统  $t=0$  时的初始状态为  $\mathbf{x}(0)$ , 则状态方程式(3-11)的解为

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (3-14)$$

根据能控性的定义, 若系统是能控的, 则对于任意的初始状态  $\mathbf{x}(0)$ , 应能找到输入  $\mathbf{u}(t)$ , 使初始状态  $\mathbf{x}(0)$  在有限的时间区间  $[0, t_f]$  内转移到零。令  $t = t_f$ ,  $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{0}$ , 则式(3-14)可写成

$$\Phi(t_f)\mathbf{x}(0) + \int_0^{t_f} \Phi(t_f - \tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau = \mathbf{0}$$

将上式的积分项移到方程右边且方程两边左乘  $\Phi(t_f)$  的逆阵  $\Phi(-t_f)$  得

$$\mathbf{x}(0) = - \int_0^{t_f} \Phi(-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (3-15)$$

对于式(3-11)线性定常连续系统, 有  $\Phi(-\tau) = e^{-\mathbf{A}\tau}$ 。根据凯莱-哈密顿定理, 可将矩阵指数函数  $e^{-\mathbf{A}\tau}$  表示为

$$\Phi(-\tau) = e^{-\mathbf{A}\tau} = \sum_{m=0}^{n-1} \alpha_m(-\tau)\mathbf{A}^m \quad (3-16)$$

将式(3-16)代入式(3-15)得

$$\mathbf{x}(0) = - \int_0^{t_f} \sum_{m=0}^{n-1} \alpha_m(-\tau)\mathbf{A}^m\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau = - \sum_{m=0}^{n-1} \mathbf{A}^m\mathbf{B} \int_0^{t_f} \alpha_m(-\tau)\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (3-17)$$

将式(3-17)的第  $m$  项定积分记为

$$\mathbf{U}_m = \int_0^{t_f} \alpha_m(-\tau)\mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad m = 0, 1, \cdots, n-1 \quad (3-18)$$

因为  $\mathbf{u}(t)$  为  $r$  维向量, 故  $\mathbf{U}_m$  亦为  $r$  维向量, 记为  $\mathbf{U}_m = \begin{bmatrix} u_{m1} \\ u_{m2} \\ \vdots \\ u_{mr} \end{bmatrix}$ , 则

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= -(\mathbf{B}\mathbf{U}_0 + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{U}_1 + \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{U}_2 + \cdots + \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\mathbf{U}_{n-1}) \\ &= -[\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \begin{bmatrix} \mathbf{U}_0 \\ \mathbf{U}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{U}_{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-19)$$



令

$$\mathbf{Q}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (3-20)$$

$$\bar{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_0 \\ \mathbf{U}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{U}_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3-21)$$

则式(3-19)写成

$$\mathbf{x}(0) = -\mathbf{Q}_c \bar{\mathbf{U}} \quad (3-22)$$

式中,  $\bar{\mathbf{U}}$  为  $nr$  维向量,  $\mathbf{Q}_c$  为  $n \times nr$  维矩阵,  $\mathbf{x}(0)$  为  $n$  维向量。

若系统能控, 则对于任意的  $\mathbf{x}(0)$ , 应能从式(3-22)中解出  $\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \cdots, \mathbf{U}_{n-1}$ 。而式(3-22)是一个具有  $nr$  个未知量、 $n$  个方程的线性非齐次方程, 且方程的个数小于变量的个数。由线性代数可知, 式(3-22)有解的充分必要条件是系数矩阵  $\mathbf{Q}_c$  和增广矩阵  $[\mathbf{Q}_c \quad \mathbf{x}(0)]$  的秩相等, 即

$$\text{rank} \mathbf{Q}_c = \text{rank} [\mathbf{Q}_c \quad \mathbf{x}(0)]$$

考虑到  $\mathbf{x}(0)$  是任意给定的, 欲使上式成立,  $\mathbf{Q}_c$  必须满秩, 即  $\text{rank} \mathbf{Q}_c = n$ , 否则不能保证上式成立。这是因为: 若  $\text{rank} \mathbf{Q}_c < n$ , 则  $\text{rank} [\mathbf{Q}_c \quad \mathbf{x}(0)]$  必可能大于  $\text{rank} \mathbf{Q}_c$ 。于是式(3-11)系统状态完全能控的充分必要条件是由  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  阵构成的能控性判别阵  $\mathbf{Q}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$  满秩, 即

$$\text{rank} \mathbf{Q}_c = \text{rank} [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = n$$

系统能控性的秩判据证毕。

**【例 3-5】** 动态系统的状态方程如下, 试判断其能控性。

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

解

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -a_2 \end{bmatrix}, \mathbf{A}^2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_2 \\ -a_1 + a_2^2 \end{bmatrix}$$

故能控性判别矩阵为

$$\mathbf{Q}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a_2 \\ 1 & -a_2 & -a_1 + a_2^2 \end{bmatrix}$$

它是一个三角形矩阵, 斜对角线元素均为 1, 不论  $a_2, a_1$  取何值, 其秩为 3, 即  $\text{rank} \mathbf{Q}_c = 3 = n$ , 故系统总是能控的。

**【例 3-6】** 动态系统的状态方程如下, 试判断其是否能控。

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

解 能控性判别矩阵为

$$Q_c = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} -5 & 25 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank} Q_c = \text{rank} \begin{bmatrix} -5 & 25 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} = 1 < 2$$

故系统不能控。

【例 3-7】 电路如图 3-5 所示。其中,  $u$  为输入,  $i$  为输出, 流经电感  $L_1$  的电流  $i_1$  和电容  $C_1$  上的电压  $u_{C1}$  为状态变量, 分析系统的能控性。

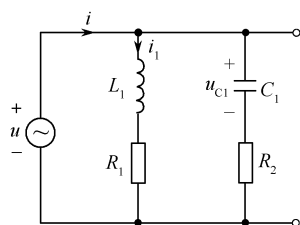


图 3-5 例 3-7 图

解 电路的原始方程为

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 = u$$

$$R_2 C_1 \frac{du_{C1}}{dt} + u_{C1} = u$$

$$i_1 + C_1 \frac{du_{C1}}{dt} = i$$

令  $x_1 = i_1$ ,  $x_2 = u_{C1}$ ,  $y = i$  且整理以上 3 式得向量-矩阵形式的系统状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2 C_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{R_2 C_1} \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{R_2} u \end{cases}$$

其能控性判别矩阵

$$Q_c = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & -\frac{R_1}{L_1 L_1} \\ \frac{1}{R_2 C_1} & -\frac{1}{(R_2 C_1)^2} \end{bmatrix}$$

当满足  $\frac{1}{R_2 C_1} \neq \frac{R_1}{L_1}$  即阻容支路时间常数 ( $R_2 C_1$ ) 与阻感支路时间常数 ( $L_1 / R_1$ ) 不相等时,  $Q_c$  满秩, 系统能控, 否则不能控。

## 2. 约当标准型判据

(1) 能控性在线性非奇异变换下的基本特性

线性系统经线性非奇异变换后不会改变其能控性。

证明 设变换前系统状态方程为

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3-23)$$

其能控性判别矩阵为

$$Q_c = [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B]$$

对式(3-23)作线性非奇异变换

$$x = T\bar{x} \quad (3-24)$$

变换后系统状态方程为

$$\dot{\bar{x}} = T^{-1}AT\bar{x} + T^{-1}Bu = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \quad (3-25)$$

式(3-25)的能控性判别矩阵

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{Q}}_c &= [\bar{\mathbf{B}} \quad \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}} \quad \cdots \quad \bar{\mathbf{A}}^{n-1}\bar{\mathbf{B}}] \\ &= [\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} \quad \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}] \\ &= \mathbf{T}^{-1}[\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Q}_c\end{aligned}\quad (3-26)$$

因  $\mathbf{T}^{-1}$  非奇异, 则由式(3-26)得

$$\text{rank } \bar{\mathbf{Q}}_c = \text{rank}(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{Q}_c) = \text{rank } \mathbf{Q}_c \quad (3-27)$$

式(3-27)表明, 线性非奇异变换后与变换前系统能控性判别矩阵的秩相等, 因此, 线性非奇异变换不改变系统的能控性。

(2) 系统特征值互异情况下的对角标准型判据

若线性定常系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (3-28)$$

其系统矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  互异, 由线性非奇异变换  $\mathbf{x} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}$  可将式(3-28)变换为如下对角线标准型

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}u = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}u = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}u \quad (3-29)$$

则式(3-28)系统状态完全能控的充分必要条件是经线性非奇异变换得到的式(3-29)中,  $\bar{\mathbf{B}}$  阵不含元素全为零的行。

为说明其用法, 现列举如下 4 个系统:

$$\textcircled{1} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} u \quad \text{系统能控}$$

$$\textcircled{2} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} u \quad \text{系统不能控}$$

$$\textcircled{3} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \text{系统能控}$$

$$\textcircled{4} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \text{系统不能控}$$

上述 4 个系统, 其状态方程的  $\mathbf{A}$  阵相同且均为特征值互异的对角标准型, 但  $\mathbf{B}$  阵不同。对于系统①③, 由于  $\mathbf{B}$  阵中不含元素全为零的行, 故系统是能控的; 对于系统②④, 由于其  $\mathbf{B}$  阵的

第一行元素全为零,状态变量  $x_1$  与控制  $u$  没有直接联系,又  $x_1$  与  $x_2$ 、 $x_3$  之间不存在耦合关系,故也不能通过  $x_2$ 、 $x_3$  与  $u$  发生联系,所以  $x_1$  是不能控的,从而系统不能控。

(3) 系统特征值具有重特征值情况下的约当标准型判据

设线性定常系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (3-30)$$

其矩阵  $\mathbf{A}$  具有重特征值  $\lambda_1$  ( $m_1$  重),  $\lambda_2$  ( $m_2$  重),  $\dots$ ,  $\lambda_l$  ( $m_l$  重), 其中  $m_i$  为  $\lambda_i$  的代数重数,  $m_1 + m_2 + \dots + m_l = n$ ,  $\lambda_i \neq \lambda_j$  ( $i \neq j$ ), 若经线性非奇异变换

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}} \quad (3-31)$$

式(3-30)变换为如下约当标准型

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}u = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}u = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & & \\ & \mathbf{J}_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \mathbf{J}_l \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}u \quad (3-32)$$

其中,  $\mathbf{J}_i$  ( $i=1, 2, \dots, l$ ) 为对应  $m_i$  重特征值  $\lambda_i$  的  $m_i$  阶约当标准块。则式(3-30)系统状态完全能控的充分必要条件是: 其经线性非奇异变换得到的约当标准型式(3-32)中, 输入矩阵  $\bar{\mathbf{B}}$  中与每个约当标准块  $\mathbf{J}_i$  ( $i=1, 2, \dots, l$ ) 最后一行相对应的各行都不是元素全为零的行。

为说明其用法, 考察如下 3 个系统:

$$\textcircled{1} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u \quad \text{系统能控}$$

$$\textcircled{2} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad \text{系统不能控}$$

$$\textcircled{3} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \text{系统能控}$$

系统①只有一个约当标准块, 且  $\mathbf{B}$  阵中与约当标准块最后一行对应的那一行元素为 2, 故系统是能控的; 系统②的  $\mathbf{B}$  阵中与约当标准块最后一行对应的那一行元素为 0, 故系统不能控; 系统③有两个约当标准块, 第一个约当标准块最后一行对应的  $\mathbf{B}$  阵中的那一行元素为  $[0 \ 1]$ , 第二个约当标准块最后一行对应的  $\mathbf{B}$  阵中的那一行元素为  $[0 \ 2]$ , 故系统能控。图 3-6、图 3-7 分别为系统①、系统②的状态变量图。由图 3-6 可见, 控制  $u$  直接加于  $x_2$ , 并通过  $x_2$  间接加于  $x_1$ , 故系统①的  $x_1$ 、 $x_2$  均是能控的。由图 3-7 可见, 控制  $u$  仅加于  $x_1$ ,  $x_2$  与控制  $u$  无直接联系也无间接联系, 故系统②的  $x_2$  不能控。

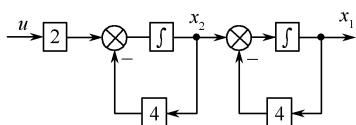


图 3-6 系统①的状态变量图

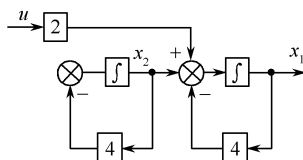


图 3-7 系统②的状态变量图

关于系统能控性的约当标准型判据,请读者注意如下两点。

① 若系统既有重特征值又有单特征值,其状态空间表达式经线性非奇异变换得到的约当标准型中,系统矩阵  $T^{-1}AT$  中既出现约当子块又出现对角子块,此时应综合运用上述对角线标准型判据和约当标准型判据分析系统的能控性。

例如,考察如下系统:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

可见,该系统矩阵有一个约当块和一个对角块,与约当块最后一行对应的  $B$  阵中的那一行元素全为 0,故该系统不能控。

② 当  $A$  有重特征值且重特征值的几何重数大于 1 时,经线性非奇异变换可能变换为对角线标准型(即  $T^{-1}AT$  为对角线型,但与重特征值对应的对角元素是相同的)或不同于式(3-32)形式的约当标准型(即在约当阵  $T^{-1}AT$  中出现两个或两个以上与同一重特征值对应的约当子块,而式(3-32)中的约当型阵其同一重特征值只对应一个约当子块),在这些情况下,则不能简单地按上述标准型判据确定系统的能控性,尚需考察  $\bar{B}=T^{-1}B$  中某些行向量的线性相关性,即应修改上述标准型判据。现直接给出有关结论:若  $A$  具有重特征值且  $\bar{A}=T^{-1}AT$  为约当标准型,但  $\bar{A}$  中出现两个或两个以上与同一特征值对应的约当子块,则系统状态完全能控的充要条件是  $\bar{B}=T^{-1}B$  中与每个约当子块最后一行相对应的各行都不是元素全为零的行;且  $\bar{B}$  中对应  $\bar{A}$  中相等特征值的全部约当子块最后一行的那些行线性无关。需要说明的是,由于任意一个 1 阶矩阵都是 1 阶约当块,所以对角线矩阵是约当矩阵的特例。

【例 3-8】 考察如下系统:

$$(1) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad \text{系统不能控}$$

$$(2) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad \text{系统不能控}$$

$$(3) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad \text{系统不能控}$$

$$(4) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad \text{系统能控}$$

$$(5) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

系统不能控

分析判断各系统的能控性。

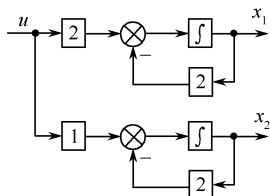


图 3-8 例 3-8 系统(1)  
状态变量图

**解** (1)  $\mathbf{A}$  为对角阵但含有相同的对角元素,其 2 重特征值  $-2$  分布在两个一阶约当子块中,且这两个约当子块最后一行对应的  $\mathbf{B}$  中的两个行向量  $[2]$ 、 $[1]$  线性相关,故系统不能控。图 3-8 为该系统的状态变量图。由图 3-8 可见,虽然  $x_1$ 、 $x_2$  均与控制  $u$  有直接联系,但由于  $x_1$ 、 $x_2$  的强迫响应之比恒为  $2:1$ ,只有当初始状态  $x_1(t_0) = 2x_2(t_0)$  时,才存在能在有限时间内使  $x_1$ 、 $x_2$  同时转移到 0 的控制  $u$ 。该系统内部状态在控制  $u$  作用下并不能任意转移,故系统状态不完全能控。本例说明,状态变量与控制  $u$  有联系只是其能控的必要条件。

(2) 系统的 3 重特征值  $-3$  分布在两个约当块  $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$  和  $[-3]$  中,且这两个约当块最后一行对应  $\mathbf{B}$  中的两个行向量  $[1]$ 、 $[3]$  线性相关,故系统不能控。

(3) 系统中 4 重特征值 3 分布在两个约当块  $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ 、 $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  中,且这两个约当块最后一行对应  $\mathbf{B}$  中的两个行向量  $[1 \quad 1]$ 、 $[2 \quad 2]$  线性相关,故系统不能控。

(4) 系统中 4 重特征值 3 分布在两个约当块  $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ 、 $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  中,且这两个约当块最后一行对应  $\mathbf{B}$  中的两个行向量  $[2 \quad 1]$ 、 $[0 \quad 1]$  线性无关,故系统能控。

(5) 系统中 4 重特征值  $-4$  分布在 3 个约当块  $\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ 、 $[-4]$ 、 $[-4]$  中,这 3 个约当块最后一行对应  $\mathbf{B}$  中的 3 个行向量  $[1 \quad 0 \quad 0]$ 、 $[0 \quad 3 \quad 0]$ 、 $[0 \quad 0 \quad 7]$  所构成的向量组线性无关;但 3 重特征值 5 分布在两个约当块  $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ 、 $[5]$  中,且这两个约当块最后一行对应  $\mathbf{B}$  中的两个行向量  $[2 \quad 0 \quad 1]$ 、 $[4 \quad 0 \quad 2]$  线性相关,故系统不能控。

顺便指出,上面介绍的判别方法也适用于线性定常离散系统。

### 3. 格拉姆矩阵判据

线性定常连续系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, t \geq 0 \quad (3-33)$$

状态完全能控的充分必要条件是存在时刻  $t_f > 0$ , 使如下定义的格拉姆(Gram)矩阵

$$\mathbf{W}_c(0, t_f) = \int_0^{t_f} e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{-\mathbf{A}^T t} d\tau \quad (3-34)$$

为非奇异的。

**证明** 先证充分性。已知  $\mathbf{W}_c(0, t_f)$  为非奇异的, 需证明系统状态完全能控。

已知  $\mathbf{W}_c(0, t_f)$  非奇异, 故  $\mathbf{W}_c^{-1}(0, t_f)$  存在, 对于状态空间中的任意非零初始状态  $\mathbf{x}_0$ , 按下式构造一个控制

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{B}^T \mathbf{e}^{-\mathbf{A}^T t} \mathbf{W}_c^{-1}(0, t_f) \mathbf{x}_0, t \in [0, t_f] \quad (3-35)$$

在  $\mathbf{u}(t)$  作用下, 式(3-33)系统在  $t_f$  时刻的状态为

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{e}^{\mathbf{A} t_f} \mathbf{x}_0 + \int_0^{t_f} \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t_f-t)} \mathbf{B} \mathbf{u}(t) dt$$

将式(3-35)代入上式得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_f) &= \mathbf{e}^{\mathbf{A} t_f} \mathbf{x}_0 - \mathbf{e}^{\mathbf{A} t_f} \int_0^{t_f} \mathbf{e}^{-\mathbf{A} t} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{e}^{-\mathbf{A}^T t} dt \mathbf{W}_c^{-1}(0, t_f) \mathbf{x}_0 \\ &= \mathbf{e}^{\mathbf{A} t_f} \mathbf{x}_0 - \mathbf{e}^{\mathbf{A} t_f} \mathbf{W}_c(0, t_f) \mathbf{W}_c^{-1}(0, t_f) \mathbf{x}_0 = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3-36)$$

这表明, 只要  $\mathbf{W}_c(0, t_f)$  非奇异, 必存在容许控制  $\mathbf{u}(t)$ , 使状态  $\mathbf{x}_0$  在  $t_f$  时刻转移到零。根据定义, 可知系统状态完全能控, 充分性得证。

再证必要性。已知系统能控, 需证明  $\mathbf{W}_c(0, t_f)$  为非奇异的。

采用反证法。反设  $\mathbf{W}_c(0, t_f)$  为奇异, 故必存在任意非零向量  $\mathbf{x}_0$ , 根据线性代数方程有非零解的条件, 有下式成立

$$\mathbf{W}_c(0, t_f) \mathbf{x}_0 = \mathbf{0} \quad (3-37)$$

则

$$\mathbf{x}_0^T \mathbf{W}_c(0, t_f) \mathbf{x}_0 = 0 \quad (3-38)$$

将式(3-34)代入式(3-38), 可进一步导出

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0^T \mathbf{W}_c(0, t_f) \mathbf{x}_0 &= \int_0^{t_f} \mathbf{x}_0^T \mathbf{e}^{-\mathbf{A} t} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{e}^{-\mathbf{A}^T t} \mathbf{x}_0 dt = \int_0^{t_f} [\mathbf{B}^T \mathbf{e}^{-\mathbf{A}^T t} \mathbf{x}_0]^T [\mathbf{B}^T \mathbf{e}^{-\mathbf{A}^T t} \mathbf{x}_0] dt \\ &= \int_0^{t_f} \|\mathbf{B}^T \mathbf{e}^{-\mathbf{A}^T t} \mathbf{x}_0\|^2 dt = 0 \end{aligned} \quad (3-39)$$

式中,  $\|\cdot\|$  表示所示向量的范数, 而范数必为非负数。于是, 使上式成立的条件为

$$\mathbf{B}^T \mathbf{e}^{-\mathbf{A}^T t} \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}, \quad \forall t \in [0, t_f] \quad (3-40)$$

另一方面, 系统完全能控, 意味着对任意非零状态  $\mathbf{x}_0$  又可得到

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{e}^{\mathbf{A} t_f} \mathbf{x}_0 + \int_0^{t_f} \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t_f-t)} \mathbf{B} \mathbf{u}(t) dt = \mathbf{0} \quad (3-41)$$

由此可导出

$$\mathbf{x}_0 = - \int_0^{t_f} \mathbf{e}^{-\mathbf{A} t} \mathbf{B} \mathbf{u}(t) dt \quad (3-42)$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_0\|^2 &= \mathbf{x}_0^T \mathbf{x}_0 = \left[ - \int_0^{t_f} \mathbf{e}^{-\mathbf{A} t} \mathbf{B} \mathbf{u}(t) dt \right]^T \mathbf{x}_0 \\ &= - \int_0^{t_f} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{B}^T \mathbf{e}^{-\mathbf{A}^T t} \mathbf{x}_0 dt \end{aligned} \quad (3-43)$$

根据式(3-40), 由式(3-43)可得到

$$\|\mathbf{x}_0\|^2 = 0 \quad (3-44)$$

即

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{0} \quad (3-45)$$

此结果与假设  $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$  矛盾, 即  $\mathbf{W}_c(0, t_f)$  为奇异的假设不成立, 因此系统状态完全能控,  $\mathbf{W}_c(0, t_f)$  必为非奇异, 必要性得证。

应用格拉姆矩阵判据判别线性定常连续系统能控性时, 需要计算矩阵指数  $e^{At}$  及定积分, 对于高阶系统, 其计算较复杂, 所以格拉姆矩阵判据主要用于理论分析及推导。读者可参照格拉姆矩阵判据的推证过程, 证明线性定常连续系统格拉姆矩阵  $\mathbf{W}_c(0, t_f)$  非奇异是系统能达的充分必要条件, 由此表明线性定常连续系统能控性与能达性是等价的。

#### 4. PBH 判据

线性定常连续系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, t \geq 0 \quad (3-46)$$

状态完全能控的充分必要条件是对于系统的所有特征值  $\lambda_i (i=1, 2, \dots, n)$ , 有

$$\text{rank}[\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A} \quad \mathbf{B}] = n \quad (3-47)$$

$$\text{或} \quad \text{rank}[s\mathbf{I} - \mathbf{A} \quad \mathbf{B}] = n, \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad (3-48)$$

其中,  $\mathbb{C}$  为复数域。

**证明** 必要性。已知系统状态完全能控, 证明式(3-47)成立。

采用反证法。反设对某个特征值  $\lambda_i$  有  $\text{rank}[\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A} \quad \mathbf{B}] < n$ , 则意味着  $[\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A} \quad \mathbf{B}]$  行线性相关, 于是必存在一个非零  $n$  维常数向量  $\alpha$  使

$$\alpha^T [\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A} \quad \mathbf{B}] = \mathbf{0} \quad (3-49)$$

考虑到问题的一般性, 由上式可导出

$$\alpha^T \mathbf{A} = \lambda_i \alpha^T, \alpha^T \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (3-50)$$

$$\text{进而有} \quad \alpha^T \mathbf{B} = \mathbf{0}, \alpha^T \mathbf{A} \mathbf{B} = \lambda_i \alpha^T \mathbf{B} = \mathbf{0}, \dots, \alpha^T \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (3-51)$$

于是可得

$$\alpha^T [\mathbf{B} \quad \mathbf{A} \mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}] = \alpha^T \mathbf{Q}_c = \mathbf{0} \quad (3-52)$$

由于  $\alpha \neq \mathbf{0}$ , 据上式, 必有

$$\text{rank} \mathbf{Q}_c < n \quad (3-53)$$

由能控性秩判据可知系统不能控, 这与系统能控的已知条件相矛盾, 故反设不成立。因此系统能控, 必有式(3-47)成立。又因为若  $s \neq \lambda_i (i=1, 2, \dots, n)$ ,  $s\mathbf{I} - \mathbf{A}$  非奇异, 因此式(3-48)与式(3-47)等价。必要性得证。

充分性的证明也可采用反证法, 请读者自行完成。

这一判据是波波夫(Popov)、贝尔维奇(Belevitch)、豪塔斯(Hautus)等人提出的, 故简称为 PBH 判据。

### 3.4.2 线性定常连续系统输出能控性

系统能控性是针对系统的状态而言的。然而在控制系统的分析、设计和实际运行中, 往往希望对系统的输出实行控制, 因此, 在研究状态能控性的同时, 也有必要研究系统的输出能控性。

#### 1. 输出能控性定义

设线性定常连续系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u \end{cases} \quad (3-54)$$

式中,  $\mathbf{x}$  为  $n$  维状态向量,  $u$  为  $r$  维输入向量,  $\mathbf{y}$  为  $m$  维输出向量。



若存在一个无约束的容许控制  $\mathbf{u}(t)$ , 在有限的时间间隔  $[t_0, t_f]$  内, 能将任一初始输出  $\mathbf{y}(t_0)$  转移到任一指定的期望的最终输出  $\mathbf{y}(t_f)$ , 则称系统是输出完全能控的, 简称输出能控。

## 2. 输出能控性判据

可以证明, 由式(3-54)所描述的线性定常连续系统, 其输出完全能控的充分必要条件是输出能控性判别矩阵  $\mathbf{Q}_m = [\mathbf{CB} \quad \mathbf{CAB} \quad \cdots \quad \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B} \quad \mathbf{D}]$  的秩等于输出向量的维数  $m$ , 即

$$\text{rank} \mathbf{Q}_m = \text{rank} [\mathbf{CB} \quad \mathbf{CAB} \quad \cdots \quad \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B} \quad \mathbf{D}] = m \quad (3-55)$$

应该指出, 对输出能控性来说, 状态能控性既不是必要的, 也不是充分的, 即状态能控性与输出能控性之间没有必然的联系。

**【例 3-9】** 设线性定常连续系统的状态方程与输出方程为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0] \mathbf{x} \end{cases}$$

试分析该系统是否输出完全能控与状态完全能控。

**解** 输出能控性判别矩阵的秩为

$$\text{rank} [\mathbf{CB} \quad \mathbf{CAB} \quad \mathbf{D}] = \text{rank} [1 \quad -2 \quad 0] = 1$$

其与输出变量的数目相等, 因此, 本系统是输出完全能控的。

而系统状态能控性判别矩阵的秩为

$$\text{rank} [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = 1 < 2$$

所以, 给定系统的状态不是完全能控的。

## 3.4.3 线性时变连续系统能控性判据

时变系统的系统矩阵  $\mathbf{A}(t)$  和输入矩阵  $\mathbf{B}(t)$  的元素是时间  $t$  的函数, 因此不能像定常系统那样直接用系统矩阵、输入矩阵构成能控性判别阵  $\mathbf{Q}_c$ , 然后检验  $\mathbf{Q}_c$  的秩来判别系统的能控性。下面介绍两种判据。

### 1. 格拉姆矩阵判据

线性时变连续系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad t, t_0 \in T_d \quad (3-56)$$

在时刻  $t_0 \in T_d$  完全能控的充分必要条件是存在一个有限时刻  $t_f \in T_d, t_f > t_0$ , 使如下定义的格拉姆矩阵

$$\mathbf{W}_c(t_0, t_f) \triangleq \int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{\Phi}(t_0, t) \mathbf{B}(t) \mathbf{B}^T(t) \boldsymbol{\Phi}^T(t_0, t) dt \quad (3-57)$$

为非奇异的。

**证明** 先证充分性。已知  $\mathbf{W}_c(t_0, t_f)$  为非奇异, 证明系统是能控的。

已知  $\mathbf{W}_c(t_0, t_f)$  非奇异, 则其逆阵  $\mathbf{W}_c^{-1}(t_0, t_f)$  存在。对于状态空间中的任意非零初始状态  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , 按照下式构造一个控制作用  $\mathbf{u}(t)$

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{B}^T(t) \boldsymbol{\Phi}^T(t_0, t) \mathbf{W}_c^{-1}(t_0, t_f) \mathbf{x}_0 \quad t \in [t_0, t_f] \quad (3-58)$$

考察在其作用下能否将  $\mathbf{x}_0$  在  $t_f$  时刻转移到零,如果成立,则说明系统是能控的。由状态转移方程知,在  $\mathbf{u}(t)$  作用下系统在  $t_f$  时刻的状态为

$$\mathbf{x}(t_f) = \Phi(t_f, t_0) \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, t) \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) dt \quad (3-59)$$

将式(3-58)代入式(3-59)有

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_f) &= \Phi(t_f, t_0) \mathbf{x}_0 - \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, t) \mathbf{B}(t) \mathbf{B}^T(t) \Phi^T(t_0, t) \mathbf{W}_c^{-1}(t_0, t) \mathbf{x}_0 dt \\ &= \Phi(t_f, t_0) \mathbf{x}_0 - \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, t_0) \Phi(t_0, t) \mathbf{B}(t) \mathbf{B}^T(t) \Phi^T(t_0, t) \mathbf{W}_c^{-1}(t_0, t) \mathbf{x}_0 dt \\ &= \Phi(t_f, t_0) \mathbf{x}_0 - \Phi(t_f, t_0) \mathbf{W}_c(t_0, t_f) \mathbf{W}_c^{-1}(t_0, t_f) \mathbf{x}_0 = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3-60)$$

推导结果表明,只要  $\mathbf{W}_c(t_0, t_f)$  非奇异,必存在容许控制  $\mathbf{u}(t)$ ,使任意初始状态  $\mathbf{x}_0$  在  $t_f$  时刻转移到零,即系统是能控的,充分性得证。

再证必要性。已知系统完全能控,证明  $\mathbf{W}_c(t_0, t_f)$  必是非奇异的。

采用反证法。反设  $\mathbf{W}_c(t_0, t_f)$  是奇异的,故必存在一个非零的初始状态  $\mathbf{x}_0$ ,根据线性代数方程有非零解的条件,有下式成立

$$\mathbf{x}_0^T \mathbf{W}_c(t_0, t_f) \mathbf{x}_0 = 0 \quad (3-61)$$

将式(3-57)代入式(3-61)有

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_f} \mathbf{x}_0^T \Phi(t_0, t) \mathbf{B}(t) \mathbf{B}^T(t) \Phi^T(t_0, t) \mathbf{x}_0 dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{B}^T(t) \Phi^T(t_0, t) \mathbf{x}_0]^T [\mathbf{B}^T(t) \Phi^T(t_0, t) \mathbf{x}_0] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \|\mathbf{B}^T(t) \Phi^T(t_0, t) \mathbf{x}_0\|^2 dt = 0 \end{aligned} \quad (3-62)$$

由式(3-62)得

$$\mathbf{B}^T(t) \Phi^T(t_0, t) \mathbf{x}_0 = \mathbf{0} \quad (3-63)$$

另一方面,系统完全能控意味着对任意非零状态  $\mathbf{x}_0$ ,又可得到

$$\mathbf{x}(t_f) = \Phi(t_f, t_0) \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, t) \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) dt = \mathbf{0} \quad (3-64)$$

则

$$\mathbf{x}_0 = - \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, t) \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) dt \quad (3-65)$$

$$\text{故有 } \|\mathbf{x}_0\|^2 = \mathbf{x}_0^T \mathbf{x}_0 = - \int_{t_0}^{t_f} [\Phi(t_0, t) \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t)]^T \mathbf{x}_0 dt = - \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{B}^T(t) \Phi^T(t_0, t) \mathbf{x}_0 dt$$

将式(3-63)代入上式,则有

$$\|\mathbf{x}_0\|^2 = 0 \quad (3-66)$$

可见,在反设  $\mathbf{W}_c(t_0, t_f)$  为奇异的情况下,系统的能控状态为零,此结果与  $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$  相矛盾,故  $\mathbf{W}_c(t_0, t_f)$  为奇异的假设不成立。因此系统完全能控,  $\mathbf{W}_c(t_0, t_f)$  必为非奇异,必要性得证。

根据式(3-57)的非奇异性判别线性时变连续系统的能控性,必须首先计算出系统的状态转移矩阵  $\Phi(t, t_0)$ ,但  $\Phi(t, t_0)$  计算困难且有时无法写成闭合解,故以上方法实用性较差。下面介绍一种只需依据  $\mathbf{A}(t)$ 、 $\mathbf{B}(t)$  阵而不必计算  $\Phi(t, t_0)$  的线性时变连续系统能控性的秩判据。

## 2. 秩判据

线性时变连续系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad t, t_0 \in T_d \quad (3-67)$$

$\mathbf{A}(t)$ 、 $\mathbf{B}(t)$ 各元素对  $t$  为  $(n-1)$  阶可微函数, 则系统在时刻  $t_0$  完全能控的条件(充分条件)为: 存在一个有限时刻  $t_f \in T_d, t_f > t_0$ , 使

$$\text{rank}[\mathbf{M}_0(t_f) \quad \mathbf{M}_1(t_f) \quad \cdots \quad \mathbf{M}_{n-1}(t_f)] = n \quad (3-68)$$

式中  $\mathbf{M}_0(t_f) = \mathbf{B}(t_f)$

$$\mathbf{M}_1(t_f) = \left[ -\mathbf{A}(t)\mathbf{M}_0(t) + \frac{d}{dt}\mathbf{M}_0(t) \right]_{t=t_f}$$

$$\mathbf{M}_2(t_f) = \left[ -\mathbf{A}(t)\mathbf{M}_1(t) + \frac{d}{dt}\mathbf{M}_1(t) \right]_{t=t_f}$$

$\vdots$

$$\mathbf{M}_{n-1}(t_f) = \left[ -\mathbf{A}(t)\mathbf{M}_{n-2}(t) + \frac{d}{dt}\mathbf{M}_{n-2}(t) \right]_{t=t_f}$$

应该指出, 式(3-68)只是一个充分条件, 即不满足这个条件的系统, 并不一定是不能控的。

**【例 3-10】** 试判断线性时变连续系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & 2t & 0 \\ 0 & 0 & t^2 + t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad T_d = [0, 3]$$

在时刻  $t_0 = 0.5$  的能控性。

**解** 试取  $t_f = 1 \in T_d, t_f > t_0$ , 计算

$$\mathbf{M}_0(t_f) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_1(t_f) = \left[ -\mathbf{A}(t)\mathbf{M}_0(t) + \frac{d}{dt}\mathbf{M}_0(t) \right]_{t=t_f} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2t \\ -t-t^2 \end{bmatrix}_{t=1} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_2(t_f) = \left[ -\mathbf{A}(t)\mathbf{M}_1(t) + \frac{d}{dt}\mathbf{M}_1(t) \right]_{t=t_f} = \begin{bmatrix} 3t \\ 4t^2 - 2 \\ (t^2 + t)^2 - 2t - 1 \end{bmatrix}_{t=1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}[\mathbf{M}_0(t_f) \quad \mathbf{M}_1(t_f) \quad \mathbf{M}_2(t_f)]_{t_f=1} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

故系统在时刻  $t_0 = 0.5$  时能控。

## 3.5 线性连续系统能观测性判据

3.3 节已经说明, 研究线性系统状态能观测性问题时, 只考察系统输出  $\mathbf{y}(t)$  反映状态向量  $\mathbf{x}(t)$  的能力, 这与系统的外加输入  $\mathbf{u}(t)$  无关。因此, 对线性系统只需要利用系统在有限时间内输

出的零输入响应去研究系统的能观测性,即只需从系统的齐次状态方程和输出方程出发来考察系统的能观测性。

### 3.5.1 线性定常连续系统能观测性判据

#### 1. 秩判据

设线性定常连续系统在输入  $u(t)=0$  时的齐次状态方程和输出方程分别为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, t \geq 0 \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (3-69)$$

$$(3-70)$$

式中,  $\mathbf{x}$  为  $n$  维状态向量,  $\mathbf{y}$  为  $m$  维输出向量,  $\mathbf{A}, \mathbf{C}$  分别为  $n \times n, m \times n$  维常数阵。

则系统状态完全能观测的充分必要条件是如下能观测性判别矩阵

$$\mathbf{Q}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3-71)$$

满秩,即

$$\text{rank} \mathbf{Q}_o = \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad (3-72)$$

**证明** 状态方程式(3-69)的解为

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0)$$

将上式代入式(3-70),得

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) \quad (3-73)$$

应用凯莱-哈密顿定理,将  $e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t) \mathbf{A}^i$  代入式(3-73),可得

$$\mathbf{y}(t) = \sum_0^{n-1} \alpha_i(t) \mathbf{CA}^i \mathbf{x}(0) \quad (3-74)$$

式(3-74)写成向量-矩阵形式,即

$$\mathbf{y}(t) = [\alpha_0(t) \mathbf{I}_m \quad \alpha_1(t) \mathbf{I}_m \quad \cdots \quad \alpha_{n-1}(t) \mathbf{I}_m] \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) \quad (3-75)$$

这是一个含有  $n$  个未知量  $m$  个方程的线性方程组,当  $m < n$  时,方程无唯一解。如要唯一地解出  $n$  维初始状态  $\mathbf{x}(0)$ ,必须用不同时刻的输出值  $\mathbf{y}(t_1), \mathbf{y}(t_2), \cdots, \mathbf{y}(t_i)$  构成具有  $n$  个独立方程式的线性方程组

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}(t_1) \\ \mathbf{y}(t_2) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0(t_1)\mathbf{I}_m & \alpha_1(t_1)\mathbf{I}_m & \cdots & \alpha_{n-1}(t_1)\mathbf{I}_m \\ \alpha_0(t_2)\mathbf{I}_m & \alpha_1(t_2)\mathbf{I}_m & \cdots & \alpha_{n-1}(t_2)\mathbf{I}_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_0(t_f)\mathbf{I}_m & \alpha_1(t_f)\mathbf{I}_m & \cdots & \alpha_{n-1}(t_f)\mathbf{I}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) \quad (3-76)$$

简记为  $\mathbf{M}\mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{y}}$  (3-77)

其中  $\bar{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t_1) \\ \mathbf{y}(t_2) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(t_f) \end{bmatrix}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \alpha_0(t_1)\mathbf{I}_m & \alpha_1(t_1)\mathbf{I}_m & \cdots & \alpha_{n-1}(t_1)\mathbf{I}_m \\ \alpha_0(t_2)\mathbf{I}_m & \alpha_1(t_2)\mathbf{I}_m & \cdots & \alpha_{n-1}(t_2)\mathbf{I}_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_0(t_f)\mathbf{I}_m & \alpha_1(t_f)\mathbf{I}_m & \cdots & \alpha_{n-1}(t_f)\mathbf{I}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$  (3-78)

由线性代数知,欲使式(3-77)的非齐次线性方程组的解存在且唯一,则系数矩阵  $\mathbf{M}$  和增广矩阵  $[\mathbf{M} \ \bar{\mathbf{y}}]$  的秩相同且为  $n$ ,即

$$\text{rank}[\mathbf{M}] = \text{rank}[\mathbf{M} \ \bar{\mathbf{y}}] = n$$

由式(3-78)可以看出,欲使矩阵  $\mathbf{M}$  的秩等于  $n$ ,则要求  $mn \times n$  维矩阵(能观测性判别矩阵)

$$\mathbf{Q}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

满秩,即

$$\text{rank} \mathbf{Q}_o = \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

**【例 3-11】** 试判断线性定常连续系统

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

的能观测性。

**解** 系统的能观测性判别矩阵为

$$\mathbf{Q}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank} \mathbf{Q}_o = 2 = n$$

所以该系统状态完全能观测。

**【例 3-12】** 电路如图 3-9 所示,  $u$  为输入, 电阻  $R_0$  上的电压  $y$  为输出,  $i_1, i_2$  为状态变量, 分析系统的能观测性。

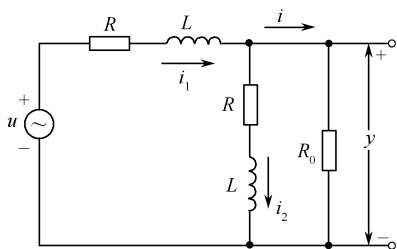


图 3-9 例 3-12 电路图

解 在例 3-4 中,已从物理概念上分析出图 3-9 所示电路以  $y$  为输出是不能观测的。本题应用秩判据进行判断。电路的原始方程为

$$Ri_1 + L \frac{di_1}{dt} + i_2 R + L \frac{di_2}{dt} = u$$

$$R_0(i_1 - i_2) = i_2 R + L \frac{di_2}{dt}$$

$$y = (i_1 - i_2)R_0$$

令  $x_1 = i_1, x_2 = i_2$ , 可导出电路的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R+R_0}{L} & \frac{R_0}{L} \\ \frac{R_0}{L} & -\frac{R+R_0}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [R_0 \quad -R_0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

能观测性判别矩阵

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0 & -R_0 \\ -\frac{RR_0 + 2R_0^2}{L} & \frac{RR_0 + 2R_0^2}{L} \end{bmatrix}$$

可见,  $\text{rank} Q_o = 1 < n = 2$ , 故系统是不能观测的。

## 2. 约当标准型判据

(1) 能观测性在线性非奇异变换下的基本特性

线性系统经非奇异变换后不会改变其能观测性。

证明 设变换前的系统状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \end{cases} \quad (3-79)$$

其能观测性判别矩阵为

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

对式(3-79)作线性非奇异变换

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}$$

变换后系统状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Bu} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}u \\ \mathbf{y} = \mathbf{CT}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{Du} = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{Du} \end{cases}$$

变换后系统的能观测性判别矩阵为

$$\bar{Q}_o = \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}\bar{A} \\ \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CT \\ CT(T^{-1}AT) \\ \vdots \\ CT(T^{-1}AT)^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CT \\ CAT \\ \vdots \\ CA^{n-1}T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} T = Q_o T$$

因为  $T$  是非奇异的, 故有

$$\text{rank } \bar{Q}_o = \text{rank}(Q_o T) = \text{rank } Q_o$$

可见, 线性非奇异变换后与变换前系统的能观测性判别矩阵的秩相等, 因此, 线性非奇异变换不改变系统的能观测性。

(2) 系统特征值互异情况下的对角线标准型判据

线性定常连续系统在输入  $u(t) = 0$  时的齐次状态方程和输出方程分别如式(3-69)、式(3-70), 若系统矩阵  $A$  的特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  互异, 作线性非奇异变换

$$x = T\bar{x} \quad (3-80)$$

将式(3-69)、式(3-70)变换为如下对角线标准型

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = T^{-1}AT\bar{x} = \bar{A}\bar{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \bar{x} \\ y = C\bar{x} = \bar{C}\bar{x} \end{cases} \quad (3-81)$$

系统状态完全能观测的充分必要条件是对角线标准型式(3-81)中,  $\bar{C}$  阵不含元素全为零的列。

【例 3-13】判断下列系统的能观测性。

$$(1) \dot{x} = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x, y = [6 \quad 4 \quad 5]x \quad \text{系统能观测}$$

$$(2) \dot{x} = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x, y = [3 \quad 2 \quad 0]x \quad \text{系统不能观测}$$

$$(3) \dot{x} = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x, y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} x \quad \text{系统能观测}$$

$$(4) \dot{x} = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x, y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} x \quad \text{系统不能观测}$$

解 上述 4 个系统, 系统矩阵  $A$  阵相同且均为特征值互异的对角阵, 但输出矩阵  $C$  阵不同, 系统(1)(3)由于  $C$  阵中不含有元素全为零的列, 故系统(1)(3)能观; 系统(2)(4)由于  $C$  阵中的

第三列元素全为零,故系统(2)(4)不能观测。读者可画出其状态变量图,则不难看出上述结论是显然的。

### (3) 系统特征值具有重特征值情况下的约当标准型判据

设线性定常连续系统在输入  $u(t)=0$  时的齐次状态方程和输出方程分别如式(3-69)、式(3-70),系统矩阵  $A$  具有相重特征值  $\lambda_1(m_1 \text{ 重}), \lambda_2(m_2 \text{ 重}), \dots, \lambda_l(m_l \text{ 重})$ , 其中  $m_i$  为  $\lambda_i$  的代数重数,  $m_1+m_2+\dots+m_l=n, \lambda_i \neq \lambda_j (i \neq j)$ , 若经线性非奇异变换

$$x = T\bar{x} \quad (3-82)$$

将式(3-69)、式(3-70)变换为如下约当标准型

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = T^{-1}AT\bar{x} = \bar{A}\bar{x} = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ & & & J_l \end{bmatrix} \bar{x} \\ y = C\bar{x} = \bar{C}\bar{x} \end{cases} \quad (3-83)$$

其中,  $J_i (i=1, 2, \dots, l)$  为对应  $m_i$  重特征值  $\lambda_i$  的  $m_i$  阶约当标准块。则系统状态完全能观测的充分必要条件是约当标准型式(3-83)中,  $\bar{C}$  阵中与每个约当标准块  $J_i (i=1, 2, \dots, l)$  的第一列相对应的各列都不是元素全为零的列。

**【例 3-14】** 判断如下 4 个系统的能观测性。

$$(1) \dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x, y = [1 \quad 0]x \quad \text{系统能观测}$$

$$(2) \dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x, y = [0 \quad 1]x \quad \text{系统不能观测}$$

$$(3) \dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} x, y = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \quad \text{系统不能观测}$$

$$(4) \dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} x, y = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \quad \text{系统能观测}$$

**解** 显然,系统(1)(4)能观,系统(2)(3)不能观,请读者自行分析。

与系统能控性的约当标准型判据相对应,关于系统能观测性的约当标准型判据也请读者注意两点。

① 若系统既有重特征值又有单特征值,其状态空间表达式经线性非奇异变换得到的约当标准型中,系统矩阵  $T^{-1}AT$  中既出现约当子块又出现对角子块,此时应综合运用对角标准型判据和约当标准型判据分析系统的能观测性。例如,例 3-14 中系统(3)、(4)的分析。

② 当  $A$  有重特征值时,也有可能变换为对角线标准型(即  $T^{-1}AT$  为对角线型,但与重特征值对应的对角元素是相同的)或不同于式(3-83)形式的约当标准型(即在约当阵  $T^{-1}AT$  中出现两个或两个以上与同一重特征值对应的约当子块,而式(3-83)中的约当型阵其同一重特征值只



对应一个约当子块),在这种情况下,则不能简单地按上述标准型判据确定系统的能观测性,尚需考察 $\bar{C}=\mathbf{C}\mathbf{T}$ 中某些列向量的线性相关性,即应修改上述标准型判据。现直接给出有关结论:若 $\mathbf{A}$ 具有重特征值且 $\bar{\mathbf{A}}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ 为约当标准型,但 $\bar{\mathbf{A}}$ 中出现两个或两个以上与同一特征值对应的约当子块,则系统状态完全能观测的充分必要条件是 $\bar{C}=\mathbf{C}\mathbf{T}$ 中与每个约当子块第一列相对应的各列都不是元素全为零的列;且与 $\bar{\mathbf{A}}$ 中所有相等特征值的约当子块第一列相对应的 $\bar{C}$ 中的那些列线性无关。现举例说明。

$$(1) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad \text{系统能观测}$$

$$(2) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad \text{系统不能观测}$$

$$(3) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad \text{系统能观测}$$

系统(1)中,对应二重特征值 2 的 2 个约当子块的首列,输出阵的两个列向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 、 $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ 线性无关;且单特征值 1 对应输出阵的列元素不全为零,故系统能观测。

系统(2)中,4 重特征值 4 分布在 3 个约当子块 $[4]$ 、 $[4]$ 、 $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ 中,这 3 个约当子块首列对应输出阵中的 3 个列向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 、 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 、 $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ 线性相关,故系统不能观测。

系统(3)中,4 重特征值 4 分布在 2 个约当子块中,这 2 个约当子块首列对应的输出阵中的 2 个列向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 、 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 线性无关,故系统能观测。

本题说明,状态变量与输出  $y$  有联系只是其能观测的必要条件。

顺便指出,上面介绍的判别方法也适用于线性定常离散系统。

### 3. 格拉姆矩阵判据

设线性定常连续系统在输入  $\mathbf{u}(t)=\mathbf{0}$  时的齐次状态方程和输出方程分别如式(3-69)、式(3-70),则系统状态完全能观的充分必要条件是存在一个有限时刻  $t_f$  使如下格拉姆(Gram)矩阵

$$\mathbf{W}_o(0, t_f) = \int_0^{t_f} e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{\mathbf{A} t} dt \quad (3-84)$$

为非奇异的。

**证明** 先证充分性,即已知  $\mathbf{W}_o(0, t_f)$  非奇异,证明系统完全能观测。

对于任意的非零初始状态  $\mathbf{x}_0$ ,由式(3-69)、式(3-70)得

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 \quad (3-85)$$

上式两边左乘  $e^{A^T t} C^T$ , 且在  $[0, t_f]$  区间积分有

$$\int_0^{t_f} e^{A^T t} C^T y(t) dt = \int_0^{t_f} e^{A^T t} C^T C e^{At} x_0 dt \quad (3-86)$$

将式(3-84)代入上式, 得

$$\int_0^{t_f} e^{A^T t} C^T y(t) dt = W_o(0, t_f) x_0 \quad (3-87)$$

若  $W_o(0, t_f)$  非奇异, 则其逆  $W_o^{-1}(0, t_f)$  存在, 则有

$$x_0 = W_o^{-1}(0, t_f) \int_0^{t_f} e^{A^T t} C^T y(t) dt \quad (3-88)$$

式(3-88)表明, 只要  $W_o(0, t_f)$  非奇异, 由  $y(t)$  能唯一确定  $x_0$ , 故系统是状态完全能观测的。充分性得证。

再证必要性, 即已知系统能观测, 证明  $W_o(0, t_f)$  必非奇异。采用反证法。设系统能观测, 但反设  $W_o(0, t_f)$  奇异, 故必存在非零初始状态  $x_0$ , 使得

$$x_0^T W_o(0, t_f) x_0 = 0 \quad (3-89)$$

即 
$$x_0^T \int_0^{t_f} e^{A^T t} C^T C e^{At} x_0 dt = \int_0^{t_f} (C e^{At} x_0)^T (C e^{At} x_0) dt = 0 \quad (3-90)$$

将式(3-85)代入式(3-90)得

$$\int_0^{t_f} y^T(t) y(t) dt = 0 \quad (3-91)$$

即 
$$\int_0^{t_f} \|y(t)\|^2 dt = 0 \quad (3-92)$$

则 
$$y(t) = C e^{At} x_0 = 0 \quad (3-93)$$

式(3-93)表明  $x_0$  为不能观测状态, 这和已知系统状态完全能观测矛盾, 故反设  $W_o(0, t_f)$  为奇异不成立。即若系统完全能观, 则  $W_o(0, t_f)$  必为非奇异, 必要性得证。

#### 4. PBH 秩判据

线性定常连续系统在输入  $u(t) = 0$  时的齐次状态方程和输出方程分别如式(3-69)、式(3-70), 则系统状态完全能观的充分必要条件是对系统矩阵  $A$  的所有特征值  $\lambda_i (i=1, 2, \dots, n)$ , 均有

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda_i I - A \\ C \end{bmatrix} = n, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (3-94)$$

因为在复数域  $\mathbb{C}$  上除  $\lambda_i (1, 2, \dots, n)$  以外的所有  $s$  均有  $\det(sI - A) \neq 0$ , 故式(3-94)可等价地表示为

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix} = n, \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad (3-95)$$

【例 3-15】系统的状态方程和输出方程分别为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \end{bmatrix} x, \quad y = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0] x$$

判别系统的能观测性。

解 计算出系统的特征值为:  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1, \lambda_4 = 0$ 。

对  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$ , 有

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 < n$$

由系统能观测性的 PBH 秩判据, 可知系统状态不完全能观测。

### 3.5.2 线性时变连续系统能观测性判据

线性时变连续系统的  $\mathbf{A}(t)$ 、 $\mathbf{B}(t)$ 、 $\mathbf{C}(t)$ 、 $\mathbf{D}(t)$  阵, 其元素是时间  $t$  的函数, 因此不能像定常系统那样, 直接根据  $\mathbf{A}$  阵和  $\mathbf{C}$  阵构造能观测判别阵来判别其能观测性。下面介绍两种判据。

#### 1. 格拉姆矩阵判据

设线性时变连续系统在输入  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$  时的齐次状态方程和输出方程分别为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}, & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad t, t_0 \in T_d \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} \end{cases} \quad (3-96)$$

$$(3-97)$$

系统在时刻  $t_0$  完全能观测的充分必要条件是存在一个有限时刻  $t_f \in T_d, t_f > t_0$ , 使如下定义的格拉姆矩阵

$$\mathbf{W}_o(t_0, t_f) \triangleq \int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{\Phi}^T(t, t_0) \mathbf{C}^T(t) \mathbf{C}(t) \boldsymbol{\Phi}(t, t_0) dt \quad (3-98)$$

为非奇异的。

这一判据的证明请读者参考 3.5.1 节线性定常连续系统能观性的格拉姆矩阵判据的证明方法和步骤完成。

同样由于时变系统状态转移矩阵  $\boldsymbol{\Phi}(t, t_0)$  计算的困难性, 根据式 (3-98) 的非奇异性判别系统的能观测性的方法实用性也较差, 其意义主要在于理论分析上的应用。下面介绍一种只需依据  $\mathbf{A}(t)$ 、 $\mathbf{C}(t)$  阵不必计算  $\boldsymbol{\Phi}(t, t_0)$  的线性时变连续系统能观测性的秩判据。

#### 2. 秩判据

设线性时变连续系统在输入  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$  时的齐次状态方程和输出方程分别为式 (3-96)、式 (3-97), 若  $\mathbf{A}(t)$ 、 $\mathbf{C}(t)$  阵均是  $(n-1)$  阶连续可导的函数矩阵, 则系统在时刻  $t_0$  状态完全能观测的充分条件为存在一个有限时刻  $t_f \in T_d, t_f > t_0$  使

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_0(t_f) \\ \mathbf{N}_1(t_f) \\ \vdots \\ \mathbf{N}_{n-1}(t_f) \end{bmatrix} = n \quad (3-99)$$

式中  $\mathbf{N}_0(t_f) = \mathbf{C}(t_f)$

$$\mathbf{N}_1(t_f) = \left[ \mathbf{N}_0(t) \mathbf{A}(t) + \frac{d}{dt} \mathbf{N}_0(t) \right]_{t=t_f}$$

$\vdots$

$$\mathbf{N}_{n-1}(t_f) = \left[ \mathbf{N}_{n-2}(t) \mathbf{A}(t) + \frac{d}{dt} \mathbf{N}_{n-2}(t) \right]_{t=t_f}$$

应该指出, 式 (3-99) 只是一个充分条件, 实际应用中, 若未找到满足式 (3-99) 的  $t_f$ , 并不能判定系统不能观。

【例 3-16】 已知线性时变连续系统为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & 2t & 0 \\ 0 & 0 & t^2+t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, & T_d=[0,10] \\ y = [1 & 1 & 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

分析系统在  $t_0=0.5$  时的能观性。

解 试取  $t_f=1>t_0$ , 且  $t_f \in T_d$ , 计算得

$$\mathbf{N}_0(t_f)=[1 \quad 1 \quad 1]$$

$$\mathbf{N}_1(t_f)=\left[\mathbf{N}_0(t)\mathbf{A}(t)+\frac{d}{dt}\mathbf{N}_0(t)\right]_{t=t_f}=[t \quad 2t+1 \quad t^2+t]_{t=1}=[1 \quad 3 \quad 2]$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_2(t_f) &= \left[\mathbf{N}_1(t)\mathbf{A}(t)+\frac{d}{dt}\mathbf{N}_1(t)\right]_{t=t_f}=[t^2+1 \quad 4t^2+3t+2 \quad (t^2+t)^2+(2t+1)]_{t=1} \\ &=[2 \quad 9 \quad 7] \end{aligned}$$

于是

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_0(t_f) \\ \mathbf{N}_1(t_f) \\ \mathbf{N}_2(t_f) \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 9 & 7 \end{bmatrix} = 3 = n$$

可见,系统在时刻  $t_0=0.5$  状态完全能观测。

## 3.6 线性离散系统的能控性与能观测性

离散时间系统的能控性和能观测性概念与连续时间系统的能控性和能观测性概念类似,为了使所阐述的概念更具代表性,本节基于线性时变离散系统给出能控性、能观测性的定义,但仅限于对线性定常离散系统的能控性、能观测性进行分析。

### 3.6.1 线性离散系统能控性定义

线性时变离散系统的状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{G}(k)\mathbf{x}(k)+\mathbf{H}(k)\mathbf{u}(k), \quad k \in T_{dk} \quad (3-100)$$

式中,  $\mathbf{x}$  为  $n$  维状态向量,  $\mathbf{u}$  为  $r$  维输入向量,  $T_{dk}$  为离散时间定义区间。设系统的初始状态是任意的,其终端状态为状态空间的原点。对于离散初始时刻  $h \in T_{dk}$  和任意的非零初始状态  $\mathbf{x}(h)=\mathbf{x}_0$ , 如果存在时刻  $l \in T_{dk}$ ,  $l>h$  和对应的输入  $\mathbf{u}(k)$ , 使得在输入作用下,系统从  $h$  时刻的状态  $\mathbf{x}(h)=\mathbf{x}_0$  出发,能在  $l$  时刻上到达原点,即  $\mathbf{x}(l)=\mathbf{0}$ , 则称系统在时刻  $h$  是状态完全能控的,简称系统能控。

### 3.6.2 线性定常离散系统能控性的秩判据

设线性定常离散系统的状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{G}\mathbf{x}(k)+\mathbf{H}\mathbf{u}(k), \quad \mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0, k=0,1,2,\dots \quad (3-101)$$

式中,  $\mathbf{x}$  为  $n$  维状态向量,  $\mathbf{u}$  为  $r$  维输入向量,  $\mathbf{G}$  为  $n \times n$  维系统矩阵,  $\mathbf{H}$  为  $n \times r$  维输入矩阵。若  $\mathbf{G}$  非奇异,则系统状态完全能控的充分必要条件是如下能控性判别矩阵

$$\mathbf{Q}_{ck}=[\mathbf{H} \quad \mathbf{GH} \quad \mathbf{G}^2\mathbf{H} \quad \cdots \quad \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H}] \quad (3-102)$$

满秩,即

$$\text{rank} Q_{\text{ck}} = n \quad (3-103)$$

**证明** 由离散系统状态方程的递推求解公式得

$$\mathbf{x}(l) = \mathbf{G}^l \mathbf{x}_0 + \sum_{k=0}^{l-1} \mathbf{G}^{l-k-1} \mathbf{H} \mathbf{u}(k) \quad (3-104)$$

设在第  $l$  步能使任意初始状态  $\mathbf{x}_0$  转移到零,于是,式(3-104)写成

$$\mathbf{x}(l) = \mathbf{G}^l \mathbf{x}_0 + \sum_{k=0}^{l-1} \mathbf{G}^{l-k-1} \mathbf{H} \mathbf{u}(k) = \mathbf{0} \quad (3-105)$$

$$\text{即} \quad \mathbf{G}^l \mathbf{x}_0 = - \sum_{k=0}^{l-1} \mathbf{G}^{l-k-1} \mathbf{H} \mathbf{u}(k) = - [\mathbf{H} \mathbf{u}(l-1) + \mathbf{G} \mathbf{H} \mathbf{u}(l-2) + \cdots + \mathbf{G}^{l-1} \mathbf{H} \mathbf{u}(0)] \quad (3-106)$$

写成向量形式为

$$[\mathbf{H} \quad \mathbf{G} \mathbf{H} \quad \cdots \quad \mathbf{G}^{l-1} \mathbf{H}] \begin{bmatrix} \mathbf{u}(l-1) \\ \mathbf{u}(l-2) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(0) \end{bmatrix} = -\mathbf{G}^l \mathbf{x}_0 \quad (3-107)$$

这是一个具有  $lr$  个变量、 $n$  个方程的非齐次线性代数方程,由线性方程解的存在性定理可知,欲从式(3-107)解出输入  $\mathbf{u}$  的充分必要条件是:系数矩阵  $[\mathbf{H} \quad \mathbf{G} \mathbf{H} \quad \cdots \quad \mathbf{G}^{l-1} \mathbf{H}]$  与增广矩阵  $[\mathbf{H} \quad \mathbf{G} \mathbf{H} \quad \cdots \quad \mathbf{G}^{l-1} \mathbf{H} \quad \vdots \quad -\mathbf{G}^l \mathbf{x}_0]$  的秩相等,即

$$\text{rank} [\mathbf{H} \quad \mathbf{G} \mathbf{H} \quad \cdots \quad \mathbf{G}^{l-1} \mathbf{H}] = \text{rank} [\mathbf{H} \quad \mathbf{G} \mathbf{H} \quad \cdots \quad \mathbf{G}^{l-1} \mathbf{H} \quad \vdots \quad -\mathbf{G}^l \mathbf{x}_0] \quad (3-108)$$

因为  $\mathbf{G}$  非奇异,则  $\mathbf{G}^l$  非奇异,  $\mathbf{G}^l \mathbf{x}_0$  是非零向量,所以,欲使式(3-108)成立,必须使

$$\text{rank} [\mathbf{H} \quad \mathbf{G} \mathbf{H} \quad \cdots \quad \mathbf{G}^{l-1} \mathbf{H}] = n \quad (3-109)$$

根据能控性定义,若  $\mathbf{G}$  非奇异,欲使系统能控,系统的  $\mathbf{G}, \mathbf{H}$  矩阵应满足式(3-109)的条件。

对于单输入系统,  $\mathbf{H}$  为  $n \times 1$  维矩阵,欲使式(3-109)成立的  $l$  值必须大于或等于  $n$ 。可以证明,对于单输入离散系统,若不能使初始状态第  $n$  步转移到零,则在第  $n$  步以后各步也不能转移到零,因此上式中的  $l$  应取为  $n$ 。于是,若  $\mathbf{G}$  非奇异,单输入离散系统状态完全能控的充分必要条件是

$$\text{rank} Q_{\text{ck}} = \text{rank} [\mathbf{H} \quad \mathbf{G} \mathbf{H} \quad \cdots \quad \mathbf{G}^{n-1} \mathbf{H}] = n \quad (3-110)$$

对于多输入系统,矩阵  $[\mathbf{H} \quad \mathbf{G} \mathbf{H} \quad \cdots \quad \mathbf{G}^{l-1} \mathbf{H}]$  是  $n \times lr$  维矩阵,其秩等于  $n$  时,  $l$  的取值取决于  $\mathbf{H}$  阵的秩。若  $\text{rank} \mathbf{H} = 1$ ,这时多输入系统和单输入系统一样  $l = n$ ;若  $\text{rank} \mathbf{H} > 1$ ,则  $l$  取值可以小于  $n$ 。考虑到上述两种情况,统一规定  $l = n$ 。因此若  $\mathbf{G}$  非奇异,多输入离散系统状态完全能控的充分必要条件是

$$\text{rank} Q_{\text{ck}} = \text{rank} [\mathbf{H} \quad \mathbf{G} \mathbf{H} \quad \cdots \quad \mathbf{G}^{n-1} \mathbf{H}] = n \quad (3-111)$$

证毕。

应该指出,若系统矩阵  $\mathbf{G}$  奇异,则条件式(3-111)为系统状态完全能控的充分条件而非必要条件。而不论  $\mathbf{G}$  是否非奇异,条件式(3-111)均为系统完全能达的充分必要条件。3.3.1节曾指出,对线性定常连续系统,能控性与能达性是等价的。而对线性定常离散系统,系统的能控性和能达性在一般情况下并非等价,只有当系统矩阵  $\mathbf{G}$  非奇异时两者才等价。

**【例 3-17】** 设单输入线性定常离散系统状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

试判断系统的能控性;若初始状态  $\mathbf{x}(0)=[2 \quad 1 \quad 0]^T$ , 确定使  $\mathbf{x}(3)=\mathbf{0}$  的控制序列  $u(0)$ 、 $u(1)$ 、 $u(2)$ ; 分析使  $\mathbf{x}(2)=\mathbf{0}$  的可能性。

**解** 系统矩阵  $\mathbf{G}$  的行列式不为零, 故  $\mathbf{G}$  非奇异, 又系统能控性判别矩阵的秩为

$$\text{rank} \mathbf{Q}_{\text{ck}} = \text{rank} [\mathbf{H} \quad \mathbf{GH} \quad \mathbf{G}^2\mathbf{H}] = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} = 3 = n$$

故系统状态完全能控。

令  $k=0, 1, 2$ , 应用递推法可得状态序列

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(0) + \mathbf{H}u(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(0)$$

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{G}\mathbf{x}(1) + \mathbf{H}u(1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} u(0) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(1)$$

$$\mathbf{x}(3) = \mathbf{G}\mathbf{x}(2) + \mathbf{H}u(2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} u(0) + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} u(1) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(2)$$

令  $\mathbf{x}(3)=\mathbf{0}$ , 有下列方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -12 \\ -4 \end{bmatrix}$$

因能控性判别矩阵非奇异, 故上式系数矩阵也是非奇异的, 则有如下控制序列解

$$\begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2 \\ -12 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -12 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 11 \\ -8 \end{bmatrix}$$

若令  $\mathbf{x}(2)=\mathbf{0}$ , 解下列方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

可见, 其系数矩阵的秩为小于增广矩阵的秩, 方程组无解, 表明不可能在两步内使给定初始状态转移至原点。

### 3.6.3 线性离散系统能观测性定义

线性时变离散系统

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}(k)\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) \end{cases}, \quad k \in T_{\text{dk}} \quad (3-112)$$

式中,  $\mathbf{x}$  为  $n$  维状态向量,  $\mathbf{u}$  为  $r$  维输入向量,  $\mathbf{y}$  为  $m$  维输出向量,  $T_{\text{dk}}$  为离散时间定义区间。对于指定的离散初始时刻  $h \in T_{\text{dk}}$  和任意的非零初始状态  $\mathbf{x}(h) = \mathbf{x}_0$ , 如果存在一个离散时刻  $l \in T_{\text{dk}}, l > h$ , 若能根据测量的  $\mathbf{y}(h), \mathbf{y}(h+1), \dots, \mathbf{y}(l)$  唯一地确定出  $\mathbf{x}_0$ , 则称系统在时刻  $h$  是状态完全能观测的, 简称系统能观测。

### 3.6.4 线性定常离散系统能观测性的秩判据

设线性定常离散系统在输入  $u=0$  时的齐次状态方程和输出方程分别为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, k=0,1,2,\dots \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{cases} \quad (3-113)$$

式中,  $\mathbf{x}$  为  $n$  维状态向量,  $\mathbf{y}$  为  $m$  维输出向量,  $\mathbf{G}$  为  $n \times n$  维系统矩阵,  $\mathbf{C}$  为  $m \times n$  维输出矩阵。则系统状态完全能观测的充分必要条件是如下能观测性判别矩阵

$$\mathbf{Q}_{ok} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{G} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3-115)$$

满秩,即

$$\text{rank} \mathbf{Q}_{ok} = \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{G} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad (3-116)$$

**证明** 根据状态方程式(3-113)的递推求解式,有

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(0) &= \mathbf{C}\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(1) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(1) = \mathbf{C}\mathbf{G}\mathbf{x}_0 \\ &\vdots \\ \mathbf{y}(n-1) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(n-1) = \mathbf{C}\mathbf{G}^{n-1}\mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (3-117)$$

将上述  $mn$  个方程写成向量形式有

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{G} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(0) \\ \mathbf{y}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(n-1) \end{bmatrix} \quad (3-118)$$

式(3-118)是由  $mn$  个关于  $n$  个未知变量的方程所组成的线性方程组,  $\mathbf{x}_0$  有唯一解的充分必要条

件是其系数矩阵  $\mathbf{Q}_{ok} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{G} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{n-1} \end{bmatrix}$  的秩等于  $n$ , 即  $\text{rank} \mathbf{Q}_{ok} = \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{G} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{n-1} \end{bmatrix} = n$ , 证毕。

**【例 3-18】** 设线性定常离散系统为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{cases}$$

试判别系统的能观测性。

解 系统的能观测性判别矩阵

$$\mathbf{Q}_{ok} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{G} \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 12 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

由  $\mathbf{Q}_{ok}$  的前三行线性无关, 即可知  $\text{rank}\mathbf{Q}_{ok}=3$ , 故系统能观测。

### 3.6.5 离散化系统能控性、能观测性与采样周期的关系

将线性连续系统离散化为线性离散系统进行分析和综合是计算机控制系统设计的一种方法, 其中一个很重要的问题就是一个能控且能观测的连续系统经时间离散化后, 是否仍然保持能控且能观测? 下面将讨论这个问题。

设线性定常连续系统  $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad t \geq 0 \quad (3-119)$$

系统的特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l, \lambda_i \neq \lambda_j, \forall i \neq j, l \leq n$ , 其中,  $\lambda_i$  可为单特征值或重特征值。

由 2.7 节, 采用时域中采样保持的离散化方法(采样周期为  $T$ , 保持器为零阶保持器)将连续系统  $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  离散化为离散系统  $\Sigma_T(\mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{C})$ , 即

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{cases} \quad (3-120)$$

式中

$$\mathbf{G} = \mathbf{e}^{\mathbf{A}T}, \mathbf{H} = \left( \int_0^T \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} dt \right) \mathbf{B} \quad (3-121)$$

**结论 1** 若线性定常连续系统  $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  不能控, 则对应的离散化系统  $\Sigma_T(\mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{C})$  必不能控。若连续系统  $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  能控, 则其离散化系统  $\Sigma_T(\mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{C})$  保持能控的充分条件为: 对满足

$$\text{Re}[\lambda_i - \lambda_j] = 0 \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, l \quad (3-122)$$

的一切特征值, 使采样周期  $T$  满足如下关系式

$$T \neq \frac{2q\pi}{\text{Im}(\lambda_i - \lambda_j)} \quad q = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3-123)$$

**结论 2** 若线性定常连续系统  $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  不能观测, 则对应的离散化系统  $\Sigma_T(\mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{C})$  必不能观测。若连续系统  $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  能观测, 则其离散化系统  $\Sigma_T(\mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{C})$  保持能观测的充分条件为: 对于满足

$$\text{Re}[\lambda_i - \lambda_j] = 0 \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, l \quad (3-124)$$

的一切特征值, 使采样周期  $T$  满足如下关系式

$$T \neq \frac{2q\pi}{\text{Im}(\lambda_i - \lambda_j)} \quad q = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3-125)$$

上述结论 1、结论 2 中的符号  $\text{Re}$  和  $\text{Im}$  分别表示取复数的实部和虚部。



【例 3-19】 设连续系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \quad 1] \mathbf{x} \end{cases}$$

分析系统离散化前后的能控、能观测性。

解 连续系统的能控、能观测性判别矩阵及秩分别为

$$\mathbf{Q}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{rank } \mathbf{Q}_c = 2$$

$$\mathbf{Q}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \text{rank } \mathbf{Q}_o = 2$$

可见,该连续系统能控且能观测。

连续系统的特征值为:  $\lambda_1 = j, \lambda_2 = -j$ , 将连续系统离散化, 据式(3-121)得

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \mathbf{e}^{\mathbf{A}T} = \mathbf{L}^{-1} \{ [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \}_{t=T} = \mathbf{L}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}^{-1} \right\}_{t=T} = \mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{\begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}}{s^2 + 1} \right\}_{t=T} \\ &= \begin{bmatrix} \cos T & \sin T \\ -\sin T & \cos T \end{bmatrix} \\ \mathbf{H} &= \left[ \int_0^T \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} dt \right] \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sin T & -(\cos T - 1) \\ (\cos T - 1) & \sin T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin T \\ \cos T - 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

离散化系统的状态空间表达式为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} \cos T & \sin T \\ -\sin T & \cos T \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} \sin T \\ \cos T - 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= [0 \quad 1] \mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

根据上述结论 1、结论 2, 若选择采样周期  $T$  的值满足下式

$$T \neq \frac{2q\pi}{\text{Im}[\lambda_i - \lambda_j]} = \frac{2q\pi}{\text{Im}(2j)} = q\pi \quad q = 1, 2, \dots$$

即  $T \neq q\pi$  时离散化系统能控且能观测。

实际上, 也可对离散化系统直接应用秩判据, 即

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{ck} &= [\mathbf{H} \quad \mathbf{GH}] = \begin{bmatrix} \sin T & 2\sin T \cos T - \sin T \\ \cos T - 1 & \cos^2 T - \sin^2 T - \cos T \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q}_{ok} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CG} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\sin T & \cos T \end{bmatrix} \\ \det \mathbf{Q}_{ck} &= 2\sin T (\cos T - 1) \begin{cases} = 0, & T = q\pi \\ \neq 0, & T \neq q\pi \end{cases}, \quad q = 1, 2, \dots \\ \det \mathbf{Q}_{ok} &= \sin T \begin{cases} = 0, & T = q\pi \\ \neq 0, & T \neq q\pi \end{cases}, \quad q = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

可见, 只要选择采样周期使其满足  $T \neq q\pi (q = 1, 2, \dots)$ , 则  $\mathbf{Q}_{ck}$ 、 $\mathbf{Q}_{ok}$  满秩, 离散化系统能控且能观测。

### 3.7 系统能控性和能观测性的对偶原理

从本章状态能控性与状态能观测性的讨论中, 可以看到其具有某种类似的关系, 这种类似的

关系反映了状态能控性和状态能观测性有内在的联系,卡尔曼提出的对偶原理揭示了这种内在的联系。

### 3.7.1 线性系统的对偶关系

有两个线性定常连续系统,设系统  $\Sigma_1(A_1, B_1, C_1)$  的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = A_1 X_1 + B_1 U_1 \\ Y_1 = C_1 X_1 \end{cases} \quad (3-126)$$

式中,  $X_1$  为  $n$  维状态向量,  $U_1$  为  $r$  维控制向量,  $Y_1$  为  $m$  维输出向量, 系统矩阵  $A_1$  为  $n \times n$  维矩阵, 输入矩阵  $B_1$  为  $n \times r$  维矩阵, 输出矩阵  $C_1$  为  $m \times n$  维矩阵。设系统  $\Sigma_2(A_2, B_2, C_2)$  的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{X}_2 = A_2 X_2 + B_2 U_2 \\ Y_2 = C_2 X_2 \end{cases} \quad (3-127)$$

式中,  $X_2$  为  $n$  维状态向量,  $U_2$  为  $m$  维控制向量,  $Y_2$  为  $r$  维输出向量, 系统矩阵  $A_2$  为  $n \times n$  维矩阵, 输入矩阵  $B_2$  为  $n \times m$  维矩阵, 输出矩阵  $C_2$  为  $r \times n$  维矩阵。若满足下述条件

$$A_2 = A_1^T, B_2 = C_1^T, C_2 = B_1^T \quad (3-128)$$

则称  $\Sigma_1(A_1, B_1, C_1)$  与  $\Sigma_2(A_2, B_2, C_2)$  是互为对偶系统。

显然,  $\Sigma_1(A_1, B_1, C_1)$  是一个  $r$  维输入  $m$  维输出的  $n$  阶系统, 其对偶系统  $\Sigma_2(A_2, B_2, C_2)$  是一个  $m$  维输入  $r$  维输出的  $n$  阶系统。图 3-10 所示为对偶系统  $\Sigma_1(A_1, B_1, C_1)$  和  $\Sigma_2(A_2, B_2, C_2)$  的结构图。由图可见, 互为对偶的两系统输入端与输出端互换, 信号传递方向相反, 信号引出点和综合点互换, 对应矩阵转置。

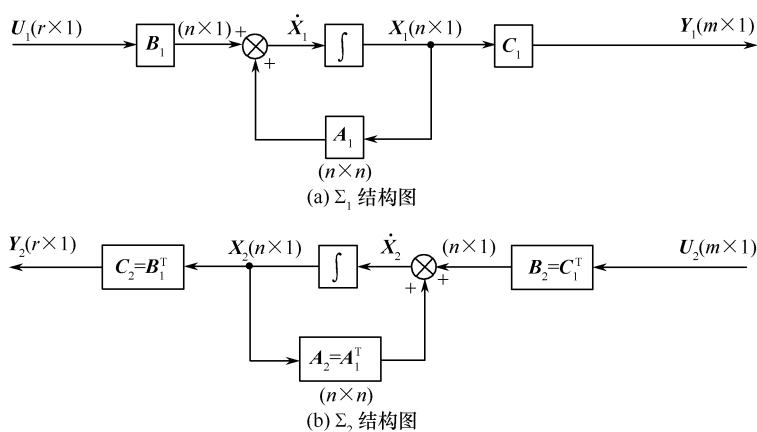


图 3-10 对偶系统的结构图

由图 3-10 可知,按式(3-128)定义的互为对偶的两系统,其特征值相同,且传递函数矩阵互为转置。

### 3.7.2 对偶原理

系统  $\Sigma_1(A_1, B_1, C_1)$  和  $\Sigma_2(A_2, B_2, C_2)$  是互为对偶的两个线性定常连续系统,则  $\Sigma_1(A_1, B_1, C_1)$  的能控性等价于  $\Sigma_2(A_2, B_2, C_2)$  的能观测性,  $\Sigma_1(A_1, B_1, C_1)$  的能观测性等价于  $\Sigma_2(A_2, B_2, C_2)$  的能控性。或者说,若  $\Sigma_1(A_1, B_1, C_1)$  是状态完全能控的(完全能观测的),则  $\Sigma_2(A_2, B_2, C_2)$  是状态完全能观测的(完全能控的)。

**证明**  $\Sigma_2(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2)$  的能控性判别矩阵为

$$\mathbf{Q}_{c2} = [\mathbf{B}_2 \quad \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{A}_2^{n-1} \mathbf{B}_2]$$

将式(3-128)的关系代入上式得

$$\mathbf{Q}_{c2} = [\mathbf{C}_1^T \quad \mathbf{A}_1^T \mathbf{C}_1^T \quad \cdots \quad (\mathbf{A}_1^T)^{n-1} \mathbf{C}_1^T] = \mathbf{Q}_{o1}^T$$

所以

$$\text{rank} \mathbf{Q}_{c2} = \text{rank} \mathbf{Q}_{o1}^T$$

即  $\Sigma_2(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2)$  的能控性判别矩阵  $\mathbf{Q}_{c2}$  的秩等于其对偶系统  $\Sigma_1(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1)$  的能观测性判别矩阵  $\mathbf{Q}_{o1}$  的秩。因此,  $\Sigma_2(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2)$  的能控性等价于  $\Sigma_1(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1)$  的能观测性。

若  $\Sigma_2(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2)$  能控, 则  $\text{rank} \mathbf{Q}_{c2} = n$ , 因此  $\text{rank} \mathbf{Q}_{o1}^T = \text{rank} \mathbf{Q}_{c2} = n$ , 则  $\Sigma_1(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1)$  能观测。

同理有

$$\mathbf{Q}_{o2}^T = [\mathbf{C}_2^T \quad \mathbf{A}_2^T \mathbf{C}_2^T \quad \cdots \quad (\mathbf{A}_2^T)^{n-1} \mathbf{C}_2^T] = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{A}_1^{n-1} \mathbf{B}_1] = \mathbf{Q}_{c1}$$

所以

$$\text{rank} \mathbf{Q}_{o2} = \text{rank} \mathbf{Q}_{c1}$$

即  $\Sigma_2(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2)$  的能观测性判别矩阵  $\mathbf{Q}_{o2}$  的秩等于其对偶系统  $\Sigma_1(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1)$  的能控性判别矩阵  $\mathbf{Q}_{c1}$  的秩。因此,  $\Sigma_2(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2)$  的能观测性等价于  $\Sigma_1(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1)$  的能控性。

若  $\Sigma_2(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2)$  能观测, 则  $\text{rank} \mathbf{Q}_{o2} = n$ , 因此  $\text{rank} \mathbf{Q}_{c1} = \text{rank} \mathbf{Q}_{o2} = n$ , 则  $\Sigma_1(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1)$  能控。

证毕。

能控性和能观测性之间存在的上述对偶关系, 是线性连续系统的重要性质, 应用对偶原理可将系统能控性分析转化为对其对偶系统能观性的分析。同样, 应用对偶原理, 系统的能观测性问题也可以因能控性问题的解决而推得相应解答。对偶原理在现代控制理论的研究中具有重要意义, 其建立了系统的状态观测及估计等问题与系统的控制问题互相转化、借鉴的桥梁, 例如, 最优估计问题可借鉴最优控制问题的结论而获得解决。

应该指出, 对线性定常离散系统而言, 是系统的能达性和能观测性对偶, 而非系统能控性与能观测性对偶。

## 3.8 线性系统的结构分解

如果一个系统是不完全能控的, 则其状态空间中所有的能控状态构成能控子空间, 其余为不能控子空间。如果一个系统是不完全能观测的, 则其状态空间中所有能观测的状态构成能观测子空间, 其余为不能观测子空间。但是, 在一般形式下, 这些子空间并未明显地分解出来。由于线性非奇异变换不改变系统的能控性、能观测性, 因此, 这个问题可通过线性非奇异变换的方法来解决。

将线性系统的状态空间按能控性和能观测性进行结构分解是状态空间分析中的一个重要内容, 在理论上它揭示了状态空间的本质特征, 为最小实现问题的提出提供了理论依据。实践上, 它与系统的状态反馈、系统镇定等问题的解决均有密切关系。

### 3.8.1 化为约当标准型的分解

3.4 节和 3.5 节分别给出了系统能控性和能观测性的约当标准型判据, 其优点在于当系统状态不完全能控(不完全能观测)时, 可以通过线性非奇异变换后得到的约当标准型确定出系统不能控(不能观测)部分。

【例 3-20】 已知线性定常系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} u \\ y = [4 \quad 5 \quad 1] \mathbf{x} \end{cases}$$

的状态不完全能控与不完全能观测,试对其进行结构分解。

**解** 矩阵  $\mathbf{A}$  为友矩阵,其特征值为  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$ 。作线性非奇异变换  $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$ , 将系统矩阵  $\mathbf{A}$  变换为对角形矩阵,即

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

其中变换矩阵为 Vandermonde 矩阵,即

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

其逆矩阵  $\mathbf{T}^{-1}$  为

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

由

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

及

$$\mathbf{C} \mathbf{T} = [0 \quad -2 \quad -2]$$

可写出给定系统经线性非奇异变换后的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \quad -2 \quad -2] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

记  $x_{co} = z_2, x_{co} = z_1, x_{co} = z_3$ , 重新排列,得结构分解后的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_{co} \\ \dot{x}_{co} \\ \dot{x}_{co} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{co} \\ x_{co} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [-2 \quad 0 \quad -2] \begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{co} \\ x_{co} \end{bmatrix} \end{cases}$$

从上列状态空间表达式可见,能控状态变量为  $z_1 = x_{co}$  (对应极点  $\lambda_1 = -1$ ) 及  $z_2 = x_{co}$  (对应极点  $\lambda_2 = -2$ ), 不能控状态变量为  $z_3 = x_{co}$  (对应极点  $\lambda_3 = -3$ ), 特征值  $\lambda_3 = -3$  形成的模态  $e^{-3t}$  是

不能控模态;能观测状态变量为  $z_2 = x_{c0}$  及  $z_3 = x_{c0}$ , 不能观测的状态变量为  $z_1 = x_{c0}$ , 特征值  $\lambda_1 = -1$  形成的模态  $e^{-t}$  是不能观测模态。

综上所述,给定系统结构分解的结果为:能控且能观测的状态变量为  $z_2 = x_{c0}$  (对应极点  $\lambda_2 = -2$ ), 能控但不能观测的状态变量为  $z_1 = x_{c0}$  (对应极点  $\lambda_1 = -1$ ); 能观测但不能控的状态变量为  $z_3 = x_{c0}$  (对应极点  $\lambda_3 = -3$ )。该系统没有既不能控又不能观测的状态变量。

### 3.8.2 按能控性和能观测性分解

#### 1. 按能控性分解

设状态不完全能控的线性定常系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (3-129)$$

式中,  $\mathbf{x}$  为  $n$  维状态向量,  $\mathbf{u}$  为  $r$  维控制向量,  $\mathbf{y}$  为  $m$  维输出向量, 系统矩阵  $\mathbf{A}$  为  $n \times n$  维矩阵, 输入矩阵  $\mathbf{B}$  为  $n \times r$  维矩阵, 输出矩阵  $\mathbf{C}$  为  $m \times n$  维矩阵。其能控性判别矩阵

$$\mathbf{Q}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (3-130)$$

的秩  $\text{rank} \mathbf{Q}_c = n_1 < n$ , 则存在线性非奇异变换

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}_c \hat{\mathbf{x}} \quad (3-131)$$

将状态空间表达式(3-129)变换为下列按能控性分解的标准型

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}} \end{cases} \quad (3-132)$$

式中,  $\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_c \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{x}}_e \end{bmatrix}$ , 其中,  $\hat{\mathbf{x}}_c$  为  $n_1$  维能控状态子向量;  $\hat{\mathbf{x}}_e$  为  $(n - n_1)$  维不能控状态子向量。

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{P}_c^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}_c = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_{11} & \hat{\mathbf{A}}_{12} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \quad (3-133)$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{P}_c^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3-134)$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{P}_c = [\hat{\mathbf{C}}_1 \quad \hat{\mathbf{C}}_2] \quad (3-135)$$

式中,  $\hat{\mathbf{A}}_{11}$ 、 $\hat{\mathbf{A}}_{12}$ 、 $\hat{\mathbf{A}}_{22}$  分别为  $n_1 \times n_1$ 、 $n_1 \times (n - n_1)$ 、 $(n - n_1) \times (n - n_1)$  维子矩阵;  $\hat{\mathbf{B}}_1$  为  $n_1 \times r$  维子矩阵;  $\hat{\mathbf{C}}_1$ 、 $\hat{\mathbf{C}}_2$  分别为  $m \times n_1$ 、 $m \times (n - n_1)$  维子矩阵。

而非奇异变换阵  $\mathbf{P}_c$  则为

$$\mathbf{P}_c = [\mathbf{P}_1 \quad \mathbf{P}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{P}_{n_1} \quad \mathbf{P}_{n_1+1} \quad \cdots \quad \mathbf{P}_n] \quad (3-136)$$

式中,  $n$  个  $n$  维列向量按如下方法构成: 前  $n_1$  个列向量  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_{n_1}$  是式(3-130)所示能控性判别矩阵  $\mathbf{Q}_c$  中的  $n_1$  个线性无关的列; 另外的  $(n - n_1)$  个列向量  $\mathbf{P}_{n_1+1}, \cdots, \mathbf{P}_n$  在确保  $\mathbf{P}_c$  为非奇异的条件下, 完全是任意的。

将式(3-132)中的输出方程展开得

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}} = [\hat{\mathbf{C}}_1 \quad \hat{\mathbf{C}}_2] \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_c \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{x}}_e \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{C}}_1 \hat{\mathbf{x}}_c + \hat{\mathbf{C}}_2 \hat{\mathbf{x}}_e = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \quad (3-137)$$

式中,  $\mathbf{y}_1 = \hat{\mathbf{C}}_1 \hat{\mathbf{x}}_c$ ,  $\mathbf{y}_2 = \hat{\mathbf{C}}_2 \hat{\mathbf{x}}_e$ 。

可以看出,系统状态空间表达式变换为式(3-132)后,系统的状态空间就被分解成能控和不能控两部分,其中能控的  $n_1$  维子系统状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_c = \hat{\mathbf{A}}_{11} \hat{\mathbf{x}}_c + \hat{\mathbf{A}}_{12} \hat{\mathbf{x}}_e + \hat{\mathbf{B}}_1 \mathbf{u} \\ \mathbf{y}_1 = \hat{\mathbf{C}}_1 \hat{\mathbf{x}}_c \end{cases} \quad (3-138)$$

不能控的  $(n-n_1)$  维子系统状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_e = \hat{\mathbf{A}}_{22} \hat{\mathbf{x}}_e \\ \mathbf{y}_2 = \hat{\mathbf{C}}_2 \hat{\mathbf{x}}_e \end{cases} \quad (3-139)$$

系统按上述能控性规范分解的结构图如图 3-11 所示。由图中可见,不能控子系统到能控子系统存在信息传递,能控子系统的状态响应  $\hat{\mathbf{x}}_c$  和整个系统的输出响应  $\mathbf{y}$  均与不能控子系统的状态  $\hat{\mathbf{x}}_e$  有关;但由能控子系统到不能控子系统没有信息传递,控制  $\mathbf{u}$  只能通过能控子系统传递到输出,不能控子系统与控制  $\mathbf{u}$  毫无联系。

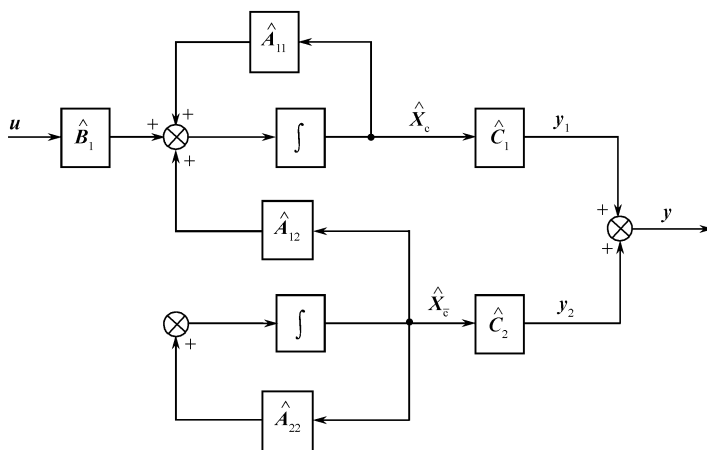


图 3-11 系统按能控性规范分解的结构图

由于线性非奇异变换不改变系统的特征值,故有

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det(\lambda \mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}) = \det(\lambda \mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}_{11}) \cdot \det(\lambda \mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}_{22}) \quad (3-140)$$

可见,子矩阵  $\hat{\mathbf{A}}_{11}$  的特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_1}$  和子矩阵  $\hat{\mathbf{A}}_{22}$  的特征值  $\lambda_{n_1+1}, \lambda_{n_1+2}, \dots, \lambda_n$  均为系统的特征值。子矩阵  $\hat{\mathbf{A}}_{11}$  的特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_1}$  对应的模态均为能控模态,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_1}$  称为系统的能控因子;子矩阵  $\hat{\mathbf{A}}_{22}$  的特征值  $\lambda_{n_1+1}, \lambda_{n_1+2}, \dots, \lambda_n$  对应的模态均为不能控模态,  $\lambda_{n_1+1}, \lambda_{n_1+2}, \dots, \lambda_n$  称为系统的不能控因子。

应该指出,由于选取非奇异变换阵  $\mathbf{P}_c$  的列向量  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_{n_1}$  及  $\mathbf{P}_{n_1+1}, \dots, \mathbf{P}_n$  的非唯一性,系统能控性规范分解不是唯一的。对于不同的分解,虽然状态空间表达式不同,但能控因子和不能控因子是相同的。

**【例 3-21】** 设线性定常系统如下,判别其能控性,若不完全能控,试将该系统按能控性进行分解。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \mathbf{y} = [0 \quad 1 \quad -2] \mathbf{x} \end{cases}$$

解 系统能控性判别矩阵  $\mathbf{Q}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

因为  $\text{rank} \mathbf{Q}_c = 2 = n_1 < n = 3$ , 所以系统是状态不完全能控的。

按式(3-136)构造 3 阶非奇异变换阵  $\mathbf{P}_c$ , 在  $\mathbf{Q}_c$  中取两个线性无关的列向量为  $\mathbf{P}_c$  的前两列, 即

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

为保证  $\mathbf{P}_c$  为非奇异, 取  $\mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , 由此线性无关列向量  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$  构成非奇异变换阵  $\mathbf{P}_c$ , 即

$$\mathbf{P}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

则引入  $\mathbf{x} = \mathbf{P}_c \hat{\mathbf{x}}$  变换, 得系统按能控性分解的状态方程和输出方程为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{P}_c^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}_c \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{P}_c^{-1} \mathbf{B} u \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \mathbf{C} \mathbf{P}_c \hat{\mathbf{x}} = [1 \quad -1 \quad -2] \hat{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

能控子系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_c = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_c + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_c + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y_1 = [1 \quad -1] \hat{\mathbf{x}}_c \end{cases}$$

不能控子系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_c = -\hat{\mathbf{x}}_c \\ y_2 = -2\hat{\mathbf{x}}_c \end{cases}$$

## 2. 按能观测性分解

系统按能观测性分解的问题对偶于系统按能控性分解的问题。

设状态不完全能观测的线性定常系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} \end{cases} \quad (3-141)$$

式中,  $\mathbf{x}$  为  $n$  维状态向量,  $\mathbf{u}$  为  $r$  维控制向量,  $\mathbf{y}$  为  $m$  维输出向量, 系统矩阵  $\mathbf{A}$  为  $n \times n$  维矩阵, 输入矩阵  $\mathbf{B}$  为  $n \times r$  维矩阵, 输出矩阵  $\mathbf{C}$  为  $m \times n$  维矩阵。

其能观测性判别矩阵

$$\mathbf{Q}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3-142)$$

的秩  $\text{rank} \mathbf{Q}_o = n_1 < n$ , 则存在线性非奇异变换

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}_o \hat{\mathbf{x}} \quad (3-143)$$

将状态空间表达式(3-141)变换为下列按能观测性分解的标准型

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}} \end{cases} \quad (3-144)$$

式中,  $\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_o \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{x}}_o \end{bmatrix}$ , 其中,  $\hat{\mathbf{x}}_o$  为  $n_1$  维能观测状态子向量;  $\hat{\mathbf{x}}_o$  为  $(n-n_1)$  维不能观测状态子向量。

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{P}_o^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}_o = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_{11} & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{A}}_{21} & \hat{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \quad (3-145)$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{P}_o^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix} \quad (3-146)$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{P}_o = [\hat{\mathbf{C}}_1 \quad \mathbf{0}] \quad (3-147)$$

式中,  $\hat{\mathbf{A}}_{11}$ 、 $\hat{\mathbf{A}}_{21}$ 、 $\hat{\mathbf{A}}_{22}$  分别为  $n_1 \times n_1$ 、 $(n-n_1) \times n_1$ 、 $(n-n_1) \times (n-n_1)$  维子矩阵;  $\hat{\mathbf{B}}_1$ 、 $\hat{\mathbf{B}}_2$  分别为  $n_1 \times r$ 、 $(n-n_1) \times r$  维子矩阵;  $\hat{\mathbf{C}}_1$  为  $m \times n_1$  维子矩阵。

而非奇异变换阵  $\mathbf{P}_o$  的逆矩阵则按下式构造

$$\mathbf{P}_o^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{t}_{n_1} \\ \vdots \\ \mathbf{t}_{n_1+1} \\ \vdots \\ \mathbf{t}_n \end{bmatrix} \quad (3-148)$$

其中, 前  $n_1$  个  $n$  维行向量  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_{n_1}$  为式(3-142)所示能观测性判别矩阵  $\mathbf{Q}_o$  中的  $n_1$  个线性无关的行向量, 另外的  $(n-n_1)$  个行向量在确保  $\mathbf{P}_o^{-1}$  为非奇异的条件下任取。

可以看出, 系统状态空间表达式变换为式(3-144)后, 系统的状态空间就被分解成能观测和不能观测两部分, 其中能观测的  $n_1$  维子系统状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_o = \hat{\mathbf{A}}_{11} \hat{\mathbf{x}}_o + \hat{\mathbf{B}}_1 \mathbf{u} \\ \mathbf{y}_1 = \hat{\mathbf{C}}_1 \hat{\mathbf{x}}_o = \mathbf{y} \end{cases} \quad (3-149)$$

不能观测的  $(n-n_1)$  维子系统状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_o = \hat{\mathbf{A}}_{22} \hat{\mathbf{x}}_o + \hat{\mathbf{B}}_2 \mathbf{u} + \hat{\mathbf{A}}_{21} \hat{\mathbf{x}}_o \\ \mathbf{y}_2 = \mathbf{0} \end{cases} \quad (3-150)$$

系统按上述能观测性规范分解的结构图如图 3-12 所示。由图中可见, 不能观测子系统到能观测子系统不存在信息传递, 且不能观测子系统向输出量又无信息传递, 因此, 不能观测子系统



是与输出量没有任何联系的孤立部分。能观测性规范分解有与能控性规范分解相类似的分析和相对应的结论。式(3-145)中,子矩阵 $\hat{\mathbf{A}}_{11}$ 的特征值形成的模态均为能观测模态,子矩阵 $\hat{\mathbf{A}}_{22}$ 的特征值形成的模态均为不能观测模态。同样,由于选取非奇异矩阵 $\mathbf{P}_o^{-1}$ 的行向量 $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_{n_1}$ 及 $\mathbf{t}_{n_1+1}, \dots, \mathbf{t}_n$ 的非唯一性,系统能观测性规范分解也不是唯一的。

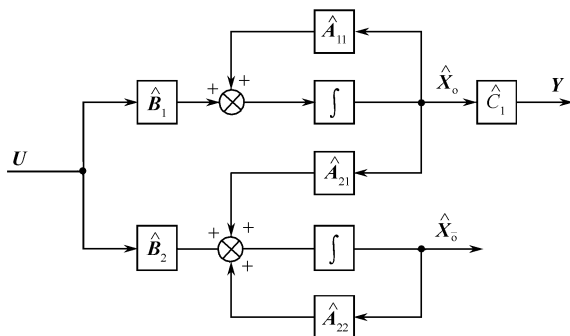


图 3-12 系统按能观测性分解结构图

【例 3-22】 判别如下系统是否能观测,若不完全能观测,将系统按能观测性进行分解。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{cases}$$

解 系统能观测性判别矩阵

$$\mathbf{Q}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

因为  $\text{rank} \mathbf{Q}_o = 2 = n_1 < n = 3$ , 故系统状态不完全能观测。按式(3-148)构造 3 阶非奇异变换阵  $\mathbf{P}_o$  的逆矩阵  $\mathbf{P}_o^{-1}$ , 在  $\mathbf{Q}_o$  中取两个线性无关的行向量为  $\mathbf{P}_o^{-1}$  的前两行, 即

$$\mathbf{t}_1 = [0 \quad 1 \quad -2], \mathbf{t}_2 = [1 \quad -2 \quad 3]$$

为保证  $\mathbf{P}_o^{-1}$  为非奇异, 取  $\mathbf{t}_3 = [1 \quad 0 \quad 0]$ , 由线性无关行向量  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$  构成非奇异变换阵  $\mathbf{P}_o$  的逆矩阵  $\mathbf{P}_o^{-1}$ , 即

$$\mathbf{P}_o^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

则

则引入  $\mathbf{x} = \mathbf{P}_o \hat{\mathbf{x}}$  变换, 得系统按能观测性分解的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{P}_o^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}_o \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{P}_o^{-1} \mathbf{B} u = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \mathbf{C} \mathbf{P}_o \hat{\mathbf{x}} = [1 \quad 0 \quad 0] \hat{\mathbf{x}} \end{cases}$$

### 3. 按能控性和能观测性分解

设  $n$  维线性定常系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (3-151)$$

是状态不完全能控和不完全能观测的。则存在线性非奇异变换

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\hat{\mathbf{x}} \quad (3-152)$$

将式(3-151)的状态空间表达式变换为

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{B}}u \\ \mathbf{y} = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}} \end{cases} \quad (3-153)$$

式中

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{13} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} & \mathbf{A}_{24} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{33} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{43} & \mathbf{A}_{44} \end{bmatrix} \quad (3-154)$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3-155)$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{P} = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{C}_3 \quad \mathbf{0}] \quad (3-156)$$

从 $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}$ 的结构可以看出,系统包含了能控能观测 $\Sigma_{co}$ 、能控但不能观测 $\Sigma_{c\bar{o}}$ 、不能控但能观测 $\Sigma_{\bar{c}o}$ 、不能控又不能观测 $\Sigma_{\bar{c}\bar{o}}$ 4个子系统。用 $\mathbf{x}_{co}, \mathbf{x}_{c\bar{o}}, \mathbf{x}_{\bar{c}o}, \mathbf{x}_{\bar{c}\bar{o}}$ 分别表示4个子系统的状态向量,即 $\hat{\mathbf{x}} = [\mathbf{x}_{co} \quad \mathbf{x}_{c\bar{o}} \quad \mathbf{x}_{\bar{c}o} \quad \mathbf{x}_{\bar{c}\bar{o}}]^T$ 。根据式(3-153)可得4个子系统的状态空间表达式

$$\Sigma_{co} : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{co} = \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_{co} + \mathbf{A}_{13}\mathbf{x}_{\bar{c}o} + \mathbf{B}_1u \\ \mathbf{y}_{co} = \mathbf{C}_1\mathbf{x}_{co} \end{cases} \quad (3-157)$$

$$\Sigma_{c\bar{o}} : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{c\bar{o}} = \mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_{co} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_{c\bar{o}} + \mathbf{A}_{23}\mathbf{x}_{\bar{c}o} + \mathbf{A}_{24}\mathbf{x}_{\bar{c}\bar{o}} + \mathbf{B}_2u \\ \mathbf{y}_{c\bar{o}} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (3-158)$$

$$\Sigma_{\bar{c}o} : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{\bar{c}o} = \mathbf{A}_{33}\mathbf{x}_{\bar{c}o} \\ \mathbf{y}_{\bar{c}o} = \mathbf{C}_3\mathbf{x}_{\bar{c}o} \end{cases} \quad (3-159)$$

$$\Sigma_{\bar{c}\bar{o}} : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{\bar{c}\bar{o}} = \mathbf{A}_{43}\mathbf{x}_{\bar{c}o} + \mathbf{A}_{44}\mathbf{x}_{\bar{c}\bar{o}} \\ \mathbf{y}_{\bar{c}\bar{o}} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (3-160)$$

系统的输出为

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_{co} + \mathbf{y}_{c\bar{o}} + \mathbf{y}_{\bar{c}o} + \mathbf{y}_{\bar{c}\bar{o}} = \mathbf{y}_{co} + \mathbf{y}_{\bar{c}o} \quad (3-161)$$

式(3-153)的结构图如图3-13所示。由图可见,在系统的输入和输出之间只存在一条唯一的单向信号传递通道,即 $u \rightarrow \mathbf{B}_1 \rightarrow \Sigma_{co} \rightarrow \mathbf{C}_1 \rightarrow \mathbf{y}$ ,它是系统的能控且能观测部分,因此,反映系统输入/输出特性的传递函数阵 $\mathbf{G}(s)$ 只能反映系统中能控且能观测的那个子系统的动力学特性,即整个线性定常系统式(3-151)的传递函数阵 $\mathbf{G}(s)$ 与其能控且能观测子系统式(3-157)的传递函数阵相同,即

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{C}_1(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{11})^{-1}\mathbf{B}_1 \quad (3-162)$$

式(3-162)表明,对于不能控系统、不能观测系统、不能控又不能观测线性定常系统,其输入/输出描述即传递函数阵只是对系统结构的一种不完全描述。只有当系统能控且能观测时,传递函数阵才是系统的完全描述。而状态空间描述式(3-153)则全面表征了系统的4个子系统,这正是状态空间描述的优点之一。

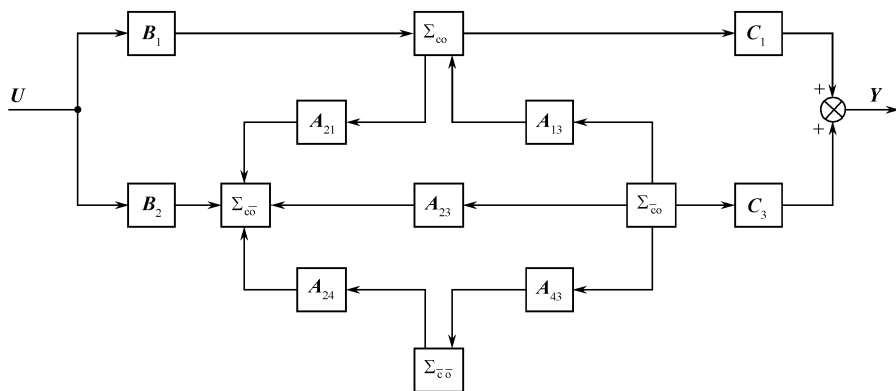


图 3-13 系统按能控能观测性分解结构图

对不能控且不能观测系统式(3-151)的分解可采用逐步分解的方法,其步骤如下:

(1) 先将系统  $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  按能控性分解

即引入线性非奇异变换

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}_c \begin{bmatrix} \mathbf{x}_c \\ \mathbf{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \quad (3-163)$$

将系统  $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  变换为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_c \\ \dot{\mathbf{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \mathbf{P}_c^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}_c \begin{bmatrix} \mathbf{x}_c \\ \mathbf{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \mathbf{P}_c^{-1} \mathbf{B} u = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_1 & \bar{\mathbf{A}}_2 \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_c \\ \mathbf{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u \\ \mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{P}_c \begin{bmatrix} \mathbf{x}_c \\ \mathbf{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_1 & \bar{\mathbf{C}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_c \\ \mathbf{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3-164)$$

式中,  $\mathbf{x}_c$  为能控子状态向量;  $\mathbf{x}_{\bar{c}}$  为不能控子状态向量,  $\mathbf{P}_c$  基于系统  $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  的能控性判别矩阵按式(3-136)构造。

(2) 将不能控子系统  $\Sigma_{\bar{c}}$  按能观测性分解

作线性非奇异变换

$$\mathbf{x}_{\bar{c}} = \mathbf{P}_{o2} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\bar{c}o} \\ \mathbf{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} \quad (3-165)$$

将不能控子系统  $\Sigma_{\bar{c}}$  变换为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{\bar{c}o} \\ \dot{\mathbf{x}}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} = \mathbf{P}_{o2}^{-1} \bar{\mathbf{A}}_4 \mathbf{P}_{o2} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\bar{c}o} \\ \mathbf{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{33} & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{A}}_{43} & \bar{\mathbf{A}}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\bar{c}o} \\ \mathbf{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} \\ \mathbf{y}_2 = \bar{\mathbf{C}}_2 \mathbf{P}_{o2} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\bar{c}o} \\ \mathbf{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_3 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\bar{c}o} \\ \mathbf{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3-166)$$

式中,  $\mathbf{x}_{\bar{c}o}$  为不能控但能观测的子状态向量;  $\mathbf{x}_{\bar{c}\bar{o}}$  为不能控不能观测的子状态向量, 线性非奇异变换阵  $\mathbf{P}_{o2}$  的逆矩阵  $\mathbf{P}_{o2}^{-1}$  基于不能控子系统  $\Sigma_{\bar{c}}$  的能观测性判别阵来构造。

(3) 将能控子系统  $\Sigma_c$  按能观测性分解

由式(3-164)得能控子系统  $\Sigma_c$  的状态方程和输出方程分别为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_c = \bar{\mathbf{A}}_1 \mathbf{x}_c + \bar{\mathbf{A}}_2 \mathbf{x}_{co} + \bar{\mathbf{B}}u \\ \mathbf{y}_1 = \bar{\mathbf{C}}_1 \mathbf{x}_c \end{cases} \quad (3-167)$$

对  $\mathbf{x}_c$  引入线性非奇异变换

$$\mathbf{x}_c = \mathbf{P}_{ol} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{co} \\ \mathbf{x}_{co} \end{bmatrix} \quad (3-169)$$

将式(3-169)、式(3-165)代入式(3-167)得

$$\mathbf{P}_{ol} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{co} \\ \dot{\mathbf{x}}_{co} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{A}}_1 \mathbf{P}_{ol} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{co} \\ \mathbf{x}_{co} \end{bmatrix} + \bar{\mathbf{A}}_2 \mathbf{P}_{ol} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{co} \\ \mathbf{x}_{co} \end{bmatrix} + \bar{\mathbf{B}}u$$

上式两边左乘  $\mathbf{P}_{ol}^{-1}$ , 得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{co} \\ \dot{\mathbf{x}}_{co} \end{bmatrix} &= \mathbf{P}_{ol}^{-1} \bar{\mathbf{A}}_1 \mathbf{P}_{ol} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{co} \\ \mathbf{x}_{co} \end{bmatrix} + \mathbf{P}_{ol}^{-1} \bar{\mathbf{A}}_2 \mathbf{P}_{ol} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{co} \\ \mathbf{x}_{co} \end{bmatrix} + \mathbf{P}_{ol}^{-1} \bar{\mathbf{B}}u \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{co} \\ \mathbf{x}_{co} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{13} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{23} & \mathbf{A}_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{co} \\ \mathbf{x}_{co} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} u \end{aligned} \quad (3-170)$$

将式(3-169)代入式(3-168)得

$$\mathbf{y}_1 = \bar{\mathbf{C}}_1 \mathbf{P}_{ol} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{co} \\ \mathbf{x}_{co} \end{bmatrix} = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{co} \\ \mathbf{x}_{co} \end{bmatrix} \quad (3-171)$$

式(3-170)、式(3-171)分别为能控子系统  $\Sigma_c$  按能观测性进行结构分解的状态方程和输出方程, 其中,  $\mathbf{x}_{co}$  为能控且能观的子状态向量,  $\mathbf{x}_{co}$  为能控但不能观的子状态向量, 线性非奇异变换阵  $\mathbf{P}_{ol}$  的逆矩阵  $\mathbf{P}_{ol}^{-1}$  基于能控子系统  $\Sigma_c$  的能观测性判别阵来构造。

将式(3-166)和式(3-170)、式(3-171)合并, 即可导出经以上 3 次变换后, 式(3-151)系统同时按能控性和能观测性进行结构分解的状态空间表达式

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{co} \\ \dot{\mathbf{x}}_{co} \\ \dot{\mathbf{x}}_{co} \\ \dot{\mathbf{x}}_{co} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{13} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} & \mathbf{A}_{24} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{33} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{43} & \mathbf{A}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{co} \\ \mathbf{x}_{co} \\ \mathbf{x}_{co} \\ \mathbf{x}_{co} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u \\ \mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{C}_3 \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{co} \\ \mathbf{x}_{co} \\ \mathbf{x}_{co} \\ \mathbf{x}_{co} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3-172)$$

【例 3-23】 已知动态系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \mathbf{y} = [0 \quad 1 \quad -2] \mathbf{x} \end{cases}$$

状态不完全能控和不完全能观测, 试将系统按能控性和能观测性进行结构分解。

**解** 例 3-21 和例 3-22 已分别求得系统  $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  的能控性判别阵、能观测性判别阵的秩分别为  $\text{rank} \mathbf{Q}_c = 2 = n_1 < n = 3$ ,  $\text{rank} \mathbf{Q}_o = 2 = n_1 < n = 3$ , 由此可见, 系统能控状态维数为 2, 能观测状态维数也为 2。

在例 3-21 中,已引入线性非奇异变换

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}_c \begin{bmatrix} \mathbf{x}_c \\ \mathbf{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_c \\ \mathbf{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \quad (3-173)$$

将系统  $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  按能控性分解为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_c \\ \dot{\mathbf{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_c \\ \mathbf{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad -1 \quad -2] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_c \\ \mathbf{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3-174)$$

由式(3-174),能控子系统  $\Sigma_c$  的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_c = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_c + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{\bar{c}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y_1 = [1 \quad -1] \mathbf{x}_c \end{cases} \quad (3-175)$$

则  $\Sigma_c$  的能观测性判别矩阵为

$$\mathbf{Q}_{o1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

其秩  $\text{rank} \mathbf{Q}_{o1} = 1$ , 表明能控子系统  $\Sigma_c$  中能观测状态维数为 1。因为整个系统的能观状态维数为 2, 则不能控子系统  $\Sigma_{\bar{c}}$  中能观状态维数为  $2-1=1$ 。又  $\Sigma_{\bar{c}}$  仅为一维, 因此其是能观测的, 即  $\mathbf{x}_{\bar{c}} = x_{\bar{c}0}$ , 故  $\Sigma_{\bar{c}}$  无须再按能观测性分解, 即令  $\mathbf{P}_{o2}^{-1} = 1$ , 可直接写出不能控子系统的状态空间表达式

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{\bar{c}} = \dot{x}_{\bar{c}0} = -x_{\bar{c}} = -x_{\bar{c}0} \\ y_2 = -2x_{\bar{c}} = -2x_{\bar{c}0} \end{cases} \quad (3-176)$$

对能控子状态向量  $\mathbf{x}_c$  引入线性非奇异变换

$$\mathbf{x}_c = \mathbf{P}_{o1} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{c0} \\ \mathbf{x}_{\bar{c}0} \end{bmatrix}$$

其中, 变换阵  $\mathbf{P}_{o1}$  的逆矩阵  $\mathbf{P}_{o1}^{-1}$  据式(3-148)构造为

$$\mathbf{P}_{o1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

根据式(3-170)、式(3-171),  $\Sigma_c$  按能观测性分解的状态方程和输出方程分别为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_{c0} \\ \dot{x}_{\bar{c}0} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_{c0} \\ x_{\bar{c}0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} x_{\bar{c}0} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{c0} \\ x_{\bar{c}0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} x_{\bar{c}0} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \end{aligned} \quad (3-177)$$

$$y_1 = [1 \quad -1] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_{c0} \\ x_{\bar{c}0} \end{bmatrix} = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_{c0} \\ x_{\bar{c}0} \end{bmatrix} \quad (3-178)$$

合并式(3-176)和式(3-177)、式(3-178)得系统按能控和能观测性分解的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_{c0} \\ \dot{x}_{\bar{c}0} \\ \dot{x}_{\bar{c}0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{c0} \\ x_{\bar{c}0} \\ x_{\bar{c}0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = y_1 + y_2 = [1 \quad 0 \quad -2] \begin{bmatrix} x_{c0} \\ x_{\bar{c}0} \\ x_{\bar{c}0} \end{bmatrix} \end{cases}$$

以上采用逐步分解方法对不能控且不能观测系统的分解思路是先按能控性分解后再按能观测性分解。显然,也可先按能观测性分解后再按能控性分解,从而将系统分解为4个子系统,只是排列次序和式(3-172)不同。

### 3.9 能控性和能观测性与传递函数(阵)的关系

由上节系统的结构分解可知,系统的传递函数(阵)只能反映其能控能观测子系统的特性,只有当系统能控且能观测时,传递函数(阵)法的外部描述方法和状态空间法的内部描述方法对系统的描述才是等价的。实际上,系统状态的完全能控性和能观测性也可用其传递函数(阵)来研究,但对于多输入多输出系统而言,这一问题讨论起来比较复杂。为此,本节主要讨论单输入单输出线性定常系统的能控性、能观测性与其传递函数零、极点相消问题之间的关系。

对于  $n$  维单输入单输出线性定常系统  $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (3-179)$$

其状态完全能控且能观测的充分必要条件是系统输入/输出传递函数

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \frac{\mathbf{C}\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B}}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (3-180)$$

没有零、极点对消,即式(3-180)传递函数的分子和分母无公因式相消。

**证明** 先证充分性。即已知  $N(s) = \mathbf{C}\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B}$  和  $D(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$  没有相消公因式,证明  $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  状态完全能控且完全能观测。用反证法,先反设  $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  不能控,则其可按能控性分解为式(3-132)的标准型,且  $n_1$  维能控子系统  $\Sigma_c(\hat{\mathbf{A}}_{11}, \hat{\mathbf{B}}_1, \hat{\mathbf{C}}_1)$  和系统  $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  具有相同的传递函数,即

$$\begin{aligned} G(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \frac{\mathbf{C}\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B}}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} = \frac{N(s)}{D(s)} \\ &= \hat{\mathbf{C}}_1(s\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}_{11})^{-1}\hat{\mathbf{B}}_1 = \frac{\hat{\mathbf{C}}_1\text{adj}(s\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}_{11})\hat{\mathbf{B}}_1}{\det(s\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}_{11})} = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \end{aligned} \quad (3-181)$$

上式中,因为  $N(s)$  和  $D(s)$  无相同因子可对消,故  $D(s)$  为  $n$  次多项式;而  $D_1(s)$  为  $n_1$  次多项式,又反设系统不能控,则能控子系统的维数  $n_1 < n$ ,故有

$$\frac{N(s)}{D(s)} \neq \frac{N_1(s)}{D_1(s)}$$

这与式(3-181)矛盾,即反设系统不能控不成立。同理,可证  $N(s)$  和  $D(s)$  无相同公因式时,系统也不可能不能观测。这就表明,单输入单输出线性定常系统,若其输入/输出传递函数没有零、极点对消,则系统必是能控且能观测的。充分性得证。

必要性证明。也可用反证法,请读者自行完成。

利用以上结论,对于单输入单输出线性定常系统  $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ ,可以根据其传递函数是否出现零、极点对消,判别相应的实现是否能控且能观测。但是,若单输入单输出线性定常系统的传递函数出现零、极点对消现象(即传递函数分子和分母有相消的公因式),则根据状态变量的选择不同,系统的状态空间实现或者是不能控的,或者是不能观测的,或者是既不能控又不能观测的。

【例 3-24】 已知系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+2}{s^2+s-2} = \frac{s+2}{(s+2)(s-1)}$$

试分别写出系统能控但不能观测、能观测但不能控、既不能控又不能观测的状态空间表达式。

**解** 因系统传递函数出现零点(-2)和极点(-2)相消现象,即传递函数的分子、分母有相消的公因式(s+2),因此,该系统的实现不可能是既能控又能观测的。

(1) 若采用能控标准型实现,上述传递函数对应的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [2 \quad 1] \mathbf{x} \end{cases}$$

显然,状态完全能控;但能观测性判别矩阵的秩  $\text{rank} \mathbf{Q}_o = \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 1 < 2 = n$ ,故不能观测。可见,系统能控但不能观测。

(2) 若采用能观标准型实现,则相应的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \quad 1] \mathbf{x} \end{cases}$$

显然,状态完全能观,但能控性判别矩阵的秩  $\text{rank} \mathbf{Q}_c = \text{rank} [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \text{rank} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 < 2 = n$ ,故状态不完全能控。可见,这时系统能观测但不能控。

(3) 上述传递函数还可对应如下状态空间描述

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \quad 1] \mathbf{x} \end{cases}$$

显然,状态  $x_1$  (对应极点  $\lambda = -2$ ) 既不能控又不能观测,因此,系统状态既不完全能控又不完全能观测。

【例 3-25】 设组合系统的传递函数为

$$G(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{s-z}{(s+1)(s+2)(s-1)}$$

分析  $z$  的取值对系统能控性与能观测性的影响。

**解** 设  $z=1$ ,按串联分解,系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

系统能控性与能观测性判别矩阵的秩分别为

$$\text{rank} \mathbf{Q}_c = 2 < n = 3, \text{rank} \mathbf{Q}_o = 3 = n$$

可见,系统不能控但能观测。因为  $z=1$ , 系统出现了零、极点对消。进一步,引入线性非奇异变换

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}_c \hat{\mathbf{x}}$$

对系统按能控性进行结构分解,取变换阵为

$$\mathbf{P}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 1 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } \mathbf{P}_c^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{8}{41} & -\frac{11}{41} & -\frac{26}{41} \\ \frac{5}{41} & -\frac{12}{41} & -\frac{6}{41} \\ \frac{6}{41} & \frac{2}{41} & \frac{1}{41} \end{bmatrix}$$

则系统按能控性结构分解后的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{P}_c^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}_c \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} + \mathbf{P}_c^{-1} \mathbf{B} u = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \mathbf{C} \mathbf{P}_c \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} = [0 \quad 1 \quad 6] \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

不能控子系统的状态方程为

$$\dot{\hat{x}}_3 = \hat{x}_3$$

可见,不能控子系统含有一个  $+1$  的极点,其为不稳定极点,因而即使一个非常小的初始值  $\hat{x}_3(0) \neq 0$ ,也会使输出中出现  $6 \hat{x}_3(0)e^t$  这一项,系统实际是不稳定的。

通过此例可以看出,在经典控制理论中,基于传递函数零、极点对消原则的设计方法虽然简单直观,但是它破坏了系统状态的能控性或能观测性,不能控部分的作用在某些情况下会引起系统品质的变坏,甚至使系统为不稳定。因此,不能利用控制器中不稳定的零点去对被控对象中不稳定的极点以求得系统的稳定。

本节最后对多输入多输出系统能控性和能观测性与传递函数阵的关系进行简要讨论。

设多输入多输出线性定常系统  $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (3-182)$$

式中,  $\mathbf{x}$  为  $n$  维状态向量,  $u$  为  $r$  维控制向量,  $\mathbf{y}$  为  $m$  维输出向量,系统矩阵  $\mathbf{A}$  为  $n \times n$  维矩阵,输入矩阵  $\mathbf{B}$  为  $n \times r$  维矩阵,输出矩阵  $\mathbf{C}$  为  $m \times n$  维矩阵,其传递函数阵为

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} = \frac{\mathbf{C} \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{B}}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \quad (3-183)$$

则多输入多输出系统  $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  能控且能观测的充分条件是其传递函数阵  $\mathbf{G}(s)$  中无零、极点相消,即式(3-183)中,系统的特征式  $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$  与  $\mathbf{C} \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{B}$  之间没有公因式。

注意:以上结论中的条件仅是多输入多输出系统能控且能观测的充分条件而并非必要条件,这一点与单变量系统不同。实际上,当多输入多输出系统能控且能观测时,其传递函数阵  $\mathbf{G}(s)$  中仍可能有零、极点相消。



【例 3-26】 设系统状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{cases}$$

由约当标准型判据,系统显然能控且能观测,但其传递函数阵

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} = \frac{\mathbf{C} \text{adj}(\mathbf{sI} - \mathbf{A}) \mathbf{B}}{\det(\mathbf{sI} - \mathbf{A})} = \frac{1}{(s-2)^2} \begin{bmatrix} s-2 & 0 \\ 0 & s-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-2} \end{bmatrix}$$

有零、极点相消。

### 3.10 能控标准型与能观测标准型

在第 1 章已说明,对一个给定的动态系统,由于状态变量选择的非唯一性,其状态空间表达式也不是唯一的。标准型是系统的状态空间表达式在一组特定的状态空间基底下导出的规范形式,在有的文献中也称规范型。例如,对角线标准型即为系统在  $n$  个线性无关特征向量为状态空间基底时的系统描述。标准型可将系统的某些特性表现得更为充分与明显,从而可简化系统的分析与综合问题。因此,在采用状态空间法分析与综合系统时,根据研究问题的需要,常常采用线性非奇异变换将状态空间表达式化为某种特定的标准形式。例如,特征值标准型(对角线标准型、约当标准型)对于状态转移矩阵的计算、能控性和能观测性的分析十分方便;对于系统的状态反馈设计,将系统化为能控标准型较为方便;对于系统状态观测器的设计及系统辨识,则将系统状态空间表达式化为能观测标准型较为方便。

前面章节的讨论表明,系统经线性非奇异变换,系统的特征值、传递函数矩阵、能控性、能观测性等重要性质均保持不变,因此,只有状态完全能控的系统才能化为能控标准型;只有状态完全能观测的系统才能化为能观测标准型。实际上,如果  $n$  维线性定常系统状态完全能控,则可从式(3-12)能控性判别矩阵  $\mathbf{Q}_c$  中取出  $n$  个线性无关的列向量,以其某种特定的线性组合为状态空间基底,导出能控标准型;与此对应,若  $n$  维线性定常系统状态完全能观测,则可从式(3-71)能观测性判别矩阵  $\mathbf{Q}_o$  中取出  $n$  个线性无关的行向量,以其某种特定的线性组合为状态空间基底,导出能观测标准型。对于有  $r$  个输入量的多输入系统,其能控性判别矩阵  $\mathbf{Q}_c$  为  $n \times nr$  维矩阵,若状态完全能控,则  $\text{rank} \mathbf{Q}_c = n$ ,但从  $\mathbf{Q}_c$  中选择  $n$  个线性无关列向量的取法不是唯一的;与此对应,对于有  $m$  个输出量的多输出系统,其能观测性判别矩阵  $\mathbf{Q}_o$  为  $nm \times n$  维矩阵,若状态完全能观测,则  $\text{rank} \mathbf{Q}_o = n$ ,但从  $\mathbf{Q}_o$  中选择  $n$  个线性无关行向量的取法也不是唯一的。为了简单起见,本节主要讨论单输入系统的能控标准型和单输出系统的能观测标准型问题,有关多输入多输出系统能控标准型及能观测标准型问题请参阅有关文献。

#### 3.10.1 单输入系统的能控标准型

在第 1 章曾得出  $n$  阶严格有理真分式传递函数

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \quad (3-184)$$

的能控标准型实现为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ \mathbf{y} = [b_n \ b_{n-1} \ \cdots \ b_2 \ b_1] \mathbf{x} \end{cases} \quad (3-185)$$

式(3-185)中,系统矩阵和输入矩阵对 $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 具有标准结构(列向量 $\mathbf{B}$ 中最后一个元素为1,而其余元素为零; $\mathbf{A}$ 为友矩阵),易证与其对应的能控性判别矩阵 $\mathbf{Q}_c$ 是一个主对角元素均为1的右下三角阵,故 $\det \mathbf{Q}_c \neq 0$ ,  $\text{rank} \mathbf{Q}_c = n$ ,即系统一定能控。因此,若单输入系统状态空间表达式中的系统矩阵和输入矩阵对 $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 具有形如式(3-185)中的标准形式,则称其为能控标准型,且该系统一定是状态完全能控的。

一个能控系统,当其系统矩阵和输入矩阵对 $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 不具有能控标准型时,一定可以通过适当的线性非奇异变换化为能控标准型。

设单输入线性定常系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (3-186)$$

能控,式中 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 分别为 $n \times n$ 、 $n \times 1$ 维矩阵,且系统的特征多项式为

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n \quad (3-187)$$

则存在线性非奇异变换

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}_c \bar{\mathbf{x}} \quad (3-188)$$

$$\mathbf{T}_c = [\mathbf{B} \ \mathbf{AB} \ \cdots \ \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}] \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \ddots & & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ a_1 & 1 & & & 0 \\ 1 & & & & \end{bmatrix} \quad (3-189)$$

将式(3-186)变换为能控标准型

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{T}_c^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_c \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{T}_c^{-1} \mathbf{B} u = \bar{\mathbf{A}}_c \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}_c u \\ \mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{T}_c \bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{C}}_c \bar{\mathbf{x}} \end{cases} \quad (3-190)$$

式中

$$\bar{\mathbf{A}}_c = \mathbf{T}_c^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{B}}_c = \mathbf{T}_c^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3-191)$$

$$\bar{\mathbf{C}}_c = \mathbf{C} \mathbf{T}_c = [\beta_n \ \beta_{n-1} \ \cdots \ \beta_1] \quad (3-192)$$

而将式(3-189)代入式(3-192)可得  $\bar{\mathbf{C}}_c = \mathbf{C}\mathbf{T}_c$  中的  $\beta_i (i=1, 2, \dots, n)$ , 即

$$\begin{cases} \beta_n = \mathbf{C}[\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} + a_1\mathbf{A}^{n-2}\mathbf{B} + \dots + a_{n-1}\mathbf{B}] \\ \beta_{n-1} = \mathbf{C}[\mathbf{A}^{n-2}\mathbf{B} + a_1\mathbf{A}^{n-3}\mathbf{B} + \dots + a_{n-2}\mathbf{B}] \\ \vdots \\ \beta_2 = \mathbf{C}[\mathbf{A}\mathbf{B} + a_1\mathbf{B}] \\ \beta_1 = \mathbf{C}\mathbf{B} \end{cases} \quad (3-193)$$

**证明** 因为系统能控, 故  $n$  个  $n$  维列向量  $\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}$  线性独立, 则按下列组合方式构成的  $n$  个新向量  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  也是线性独立的, 即

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} + a_1\mathbf{A}^{n-2}\mathbf{B} + \dots + a_{n-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{e}_2 = \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{B} + a_1\mathbf{A}^{n-3}\mathbf{B} + \dots + a_{n-2}\mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{n-1} = \mathbf{A}\mathbf{B} + a_1\mathbf{B} \\ \mathbf{e}_n = \mathbf{B} \end{cases} \quad (3-194)$$

式中,  $a_i (i=1, 2, \dots, n-1)$  由矩阵  $\mathbf{A}$  的特征多项式

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

所确定。

引入线性非奇异变换  $\mathbf{x} = \mathbf{T}_c \bar{\mathbf{x}}$ , 且以  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  为列向量构造变换阵  $\mathbf{T}_c$ , 即

$$\mathbf{T}_c = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \dots \quad \mathbf{e}_n] \quad (3-195)$$

因变换后的系统矩阵为

$$\bar{\mathbf{A}}_c = \mathbf{T}_c^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}_c \quad (3-196)$$

则有

$$\mathbf{T}_c \bar{\mathbf{A}}_c = \mathbf{A}\mathbf{T}_c = \mathbf{A}[\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \dots \quad \mathbf{e}_n] = [\mathbf{A}\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{A}\mathbf{e}_2 \quad \dots \quad \mathbf{A}\mathbf{e}_n] \quad (3-197)$$

由式(3-194)得

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{e}_1 &= \mathbf{A}(\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} + a_1\mathbf{A}^{n-2}\mathbf{B} + \dots + a_{n-1}\mathbf{B}) \\ &= (\mathbf{A}^n\mathbf{B} + a_1\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} + \dots + a_{n-1}\mathbf{A}\mathbf{B} + a_n\mathbf{B}) - a_n\mathbf{B} \end{aligned}$$

根据凯莱-哈密顿定理有

$$\mathbf{A}^n + a_1\mathbf{A}^{n-1} + \dots + a_{n-1}\mathbf{A} + a_n\mathbf{I} = \mathbf{0}$$

故

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{e}_1 &= -a_n\mathbf{B} = -a_n\mathbf{e}_n \\ \mathbf{A}\mathbf{e}_2 &= \mathbf{A}(\mathbf{A}^{n-2}\mathbf{B} + a_1\mathbf{A}^{n-3}\mathbf{B} + \dots + a_{n-2}\mathbf{B}) \\ &= (\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} + a_1\mathbf{A}^{n-2}\mathbf{B} + \dots + a_{n-2}\mathbf{A}\mathbf{B} + a_{n-1}\mathbf{B}) - a_{n-1}\mathbf{B} \\ &= \mathbf{e}_1 - a_{n-1}\mathbf{B} = \mathbf{e}_1 - a_{n-1}\mathbf{e}_n \\ &\vdots \\ \mathbf{A}\mathbf{e}_{n-1} &= \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{B} + a_1\mathbf{B}) = (\mathbf{A}^2\mathbf{B} + a_1\mathbf{A}\mathbf{B} + a_2\mathbf{B}) - a_2\mathbf{B} \\ &= \mathbf{e}_{n-2} - a_2\mathbf{e}_n \\ \mathbf{A}\mathbf{e}_n &= \mathbf{A}\mathbf{B} = (\mathbf{A}\mathbf{B} + a_1\mathbf{B}) - a_1\mathbf{B} = \mathbf{e}_{n-1} - a_1\mathbf{e}_n \end{aligned}$$

将以上  $\mathbf{A}\mathbf{e}_1, \mathbf{A}\mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{A}\mathbf{e}_n$  代入式(3-197)得

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_c \bar{\mathbf{A}}_c &= [\mathbf{A}\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{A}\mathbf{e}_2 \quad \dots \quad \mathbf{A}\mathbf{e}_{n-1} \quad \mathbf{A}\mathbf{e}_n] = [-a_n\mathbf{e}_n \quad \mathbf{e}_1 - a_{n-1}\mathbf{e}_n \quad \dots \quad \mathbf{e}_{n-2} - a_2\mathbf{e}_n \quad \mathbf{e}_{n-1} - a_1\mathbf{e}_n] \\ &= [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \dots \quad \mathbf{e}_{n-1} \quad \mathbf{e}_n] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因为

$$\mathbf{T}_c = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{e}_n]$$

所以证得

$$\bar{\mathbf{A}}_c = \mathbf{T}_c^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}$$

又因为变换后的输入矩阵

$$\bar{\mathbf{B}}_c = \mathbf{T}_c^{-1} \mathbf{B}$$

则

$$\mathbf{T}_c \bar{\mathbf{B}}_c = \mathbf{B}$$

将式(3-194)中  $\mathbf{B} = \mathbf{e}_n$  代入上式得

$$\mathbf{T}_c \bar{\mathbf{B}}_c = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{e}_n] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

所以证得

$$\bar{\mathbf{B}}_c = \mathbf{T}_c^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

且将式(3-194)代入式(3-195)证得

$$\mathbf{T}_c = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{e}_n] = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \begin{bmatrix} a_{n-1} & \cdots & a_1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_1 & 1 & & \\ 1 & & & 0 \end{bmatrix}$$

证毕。

应该指出,实现能控标准型变换的核心在于构造线性非奇异变换阵。可以证明,引入线性非奇异变换  $\mathbf{x} = \mathbf{T}_c \bar{\mathbf{x}}$ , 将状态完全能控的单输入线性定常系统式(3-186)变换为能控标准型式(3-190)的变换矩阵  $\mathbf{T}_c$  的逆矩阵可表达为

$$\mathbf{T}_c^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_1 \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{T}_1 \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3-198)$$

式中,行向量  $\mathbf{T}_1$  为式(3-186)的能控性判别矩阵  $\mathbf{Q}_c$  的逆矩阵的最后一行,即

$$\mathbf{T}_1 = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1] \mathbf{Q}_c^{-1} = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1] [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]^{-1} \quad (3-199)$$

因此,在通过线性非奇异变换  $\mathbf{x} = \mathbf{T}_c \bar{\mathbf{x}}$  化状态完全能控的单输入线性定常系统式(3-186)为式(3-190)所示的能控标准型时,既可根据式(3-189)先确定变换阵  $\mathbf{T}_c$ ,再由矩阵  $\mathbf{T}_c$  求逆得  $\mathbf{T}_c^{-1}$ ;也可根据式(3-198)先确定变换阵  $\mathbf{T}_c$  的逆矩阵  $\mathbf{T}_c^{-1}$ ,再由矩阵  $\mathbf{T}_c^{-1}$  求逆得  $\mathbf{T}_c$ 。

显然,采用式(3-190)的单输入单输出系统  $\Sigma(\bar{\mathbf{A}}_c, \bar{\mathbf{B}}_c, \bar{\mathbf{C}}_c)$ , 容易求出其传递函数,即

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\beta_1 s^{n-1} + \beta_2 s^{n-2} + \cdots + \beta_{n-1} s + \beta_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \quad (3-200)$$

从式(3-200)可以看出,传递函数分母多项式的各项系数是能控标准型  $\Sigma(\bar{\mathbf{A}}_c, \bar{\mathbf{B}}_c, \bar{\mathbf{C}}_c)$  系统阵  $\bar{\mathbf{A}}_c$  的最后一行对应元素的负值,分子多项式的各项系数是  $\Sigma(\bar{\mathbf{A}}_c, \bar{\mathbf{B}}_c, \bar{\mathbf{C}}_c)$  输出阵  $\bar{\mathbf{C}}_c$  的对应元素。另

一方面,根据传递函数的分母、分子多项式的系数,也可直接写出如式(3-190)所示的能控标准型的实现 $\Sigma(\bar{\mathbf{A}}_c, \bar{\mathbf{B}}_c, \bar{\mathbf{C}}_c)$ 。

【例 3-27】 试将下列状态空间表达式变换成能控标准型,并求系统的传递函数。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \quad 0 \quad 1] \mathbf{x} \end{cases}$$

解 变换前系统能控判别矩阵

$$\mathbf{Q}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 16 \\ 1 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

因为  $\text{rank} \mathbf{Q}_c = 3 = n$ , 故系统是能控的, 可化为能控标准型。又因为系统的特征多项式为

$$\det[\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}] = |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^3 - 9\lambda + 2$$

故  $a_1 = 0, a_2 = -9, a_3 = 2$ 。

引入线性非奇异变换  $\mathbf{x} = \mathbf{T}_c \bar{\mathbf{x}}$ , 其中变换阵  $\mathbf{T}_c$  由式(3-189)得

$$\mathbf{T}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B}] \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 16 \\ 1 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -1 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

则

$$\mathbf{T}_c^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -1 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

也可根据式(3-198)先求变换阵  $\mathbf{T}_c$  的逆矩阵  $\mathbf{T}_c^{-1}$ 。由式(3-199)得

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 &= [0 \quad 0 \quad 1] \mathbf{Q}_c^{-1} = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 2 & 4 & 16 \\ 1 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 12 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{1}{2} & -2 \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

由式(3-198)得  $\mathbf{T}_c$  的逆矩阵  $\mathbf{T}_c^{-1}$  为

$$\mathbf{T}_c^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_1 \mathbf{A} \\ \mathbf{T}_1 \mathbf{A}^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

则

$$\mathbf{T}_c = (\mathbf{T}_c^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -1 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

变换后所得能控标准型为

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{A}}_c \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}_c u \\ \mathbf{y} = \bar{\mathbf{C}}_c \bar{\mathbf{x}} \end{cases}$$

其中

$$\bar{\mathbf{A}}_c = \mathbf{T}_c^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 9 & 0 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{B}}_c = \mathbf{T}_c^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{C}}_c = \mathbf{C} \mathbf{T}_c = [3 \quad 2 \quad 1] = [\beta_3 \quad \beta_2 \quad \beta_1]$$

由能控标准型,根据式(3-200)可直接写出系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{\beta_1 s^2 + \beta_2 s + \beta_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} = \frac{s^2 + 2s + 3}{s^3 - 9s + 2}$$

### 3.10.2 单输出系统的能观测标准型

在第1章曾得出  $n$  阶严格有理真分式传递函数

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \quad (3-201)$$

的能观测标准型实现为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} u \\ \mathbf{y} = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \mathbf{x} \end{cases} \quad (3-202)$$

式(3-202)中,系统矩阵和输出矩阵对  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  具有标准结构(行向量  $\mathbf{C}$  中最后一个元素为 1,而其余元素为零;  $\mathbf{A}$  为友矩阵的转置),易证与其对应的能观测性判别矩阵  $\mathbf{Q}_o$  的行列式  $\det \mathbf{Q}_o \neq 0$ ,故  $\text{rank} \mathbf{Q}_o = n$ ,即系统一定能观测。若单输出系统状态空间表达式中的系统矩阵和输出矩阵对  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  具有形如式(3-202)中的标准形式,则称其为能观测标准型,且该系统一定是状态完全能观测的。

一个能观测系统,当其系统矩阵和输出矩阵对  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  不具有能观测标准型时,一定可以通过适当的线性非奇异变换化为能观测标准型。设单输出线性定常系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} u \\ \mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} \end{cases} \quad (3-203)$$

能观测,式中  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{C}$  分别为  $n \times n$ 、 $1 \times n$  维矩阵,且系统的特征多项式为

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n \quad (3-204)$$

则存在线性非奇异变换

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}_o \bar{\mathbf{x}} \quad (3-205)$$

变换矩阵  $\mathbf{T}_o$  的逆矩阵

$$\mathbf{T}_o^{-1} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \ddots & 1 & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ a_1 & 1 & & 0 & \\ 1 & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C} \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^{n-2} \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3-206)$$

将式(3-203)变换为能观测标准型

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{T}_o^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_o \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{T}_o^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u} = \bar{\mathbf{A}}_o \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}_o \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{T}_o \bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{C}}_o \bar{\mathbf{x}} \end{cases} \quad (3-207)$$

其中

$$\bar{\mathbf{A}}_o = \mathbf{T}_o^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \quad (3-208)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_o = \mathbf{T}_o^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta_n \\ \beta_{n-1} \\ \vdots \\ \beta_1 \end{bmatrix} \quad (3-209)$$

$$\bar{\mathbf{C}}_o = \mathbf{C} \mathbf{T}_o = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \quad (3-210)$$

**证明** 应用对偶原理证明。

因为式(3-203)所示系统  $\Sigma_1(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  能观测, 则其对偶系统  $\Sigma_2(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T, \mathbf{B}^T)$  能控。

由式(3-188)~式(3-190), 引入线性非奇异变换

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}_{c2} \bar{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{T}_{c2} = [\mathbf{C}^T \quad \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T \quad \cdots \quad (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{C}^T] \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ a_1 & 1 & & & \mathbf{0} \\ 1 & & & & \end{bmatrix}$$

可将  $\Sigma_2(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T, \mathbf{B}^T)$  变换为  $\bar{\mathbf{x}}$  下的能控标准型  $\Sigma_{2c}$ , 即

$$\Sigma_{2c}: \begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{T}_{c2}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{T}_{c2} \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{T}_{c2}^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{u} = \bar{\mathbf{A}}_c \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}_c \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{B}^T \mathbf{T}_{c2} \bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{C}}_c \bar{\mathbf{x}} \end{cases} \quad (3-211)$$

式中,  $\bar{\mathbf{A}}_c, \bar{\mathbf{B}}_c, \bar{\mathbf{C}}_c$  分别如式(3-191)、式(3-192)所示。则由对偶原理,  $\Sigma_1(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  在  $\bar{\mathbf{x}}$  下的能观测标准型为

$$\Sigma_{1o}: \begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}} = (\mathbf{T}_{c2}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{T}_{c2})^T \bar{\mathbf{x}} + (\mathbf{B}^T \mathbf{T}_{c2})^T \mathbf{u} = \mathbf{T}_{c2}^T \mathbf{A} (\mathbf{T}_{c2}^T)^{-1} \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{T}_{c2}^T \mathbf{B} \mathbf{u} = \bar{\mathbf{A}}_c^T \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{C}}_c^T \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = (\mathbf{T}_{c2}^{-1} \mathbf{C}^T)^T \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{C} (\mathbf{T}_{c2}^T)^{-1} \bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{B}}_c^T \bar{\mathbf{x}} \end{cases} \quad (3-212)$$

式(3-212)表明, 对于式(2-203)所示能观测系统  $\Sigma_1(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ , 引入线性非奇异变换

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}_o \bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{T}_{c2}^T)^{-1} \bar{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{T}_o^{-1} = \mathbf{T}_{c2}^T = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ a_1 & 1 & & & \mathbf{0} \\ 1 & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C} \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^{n-2} \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$

可变换为式(3-207)所示的能观测标准型。

证毕。

与能控的单输入系统能控标准型变换对应,应用对偶原理亦可证明,引入线性非奇异变换  $\mathbf{x}=\mathbf{T}_o\bar{\mathbf{x}}$ ,将状态完全能观测的单输出线性定常系统式(3-203)变换为能观测标准型式(3-207)的变换矩阵  $\mathbf{T}_o$  可表达为

$$\mathbf{T}_o=[\mathbf{P}_1 \quad \mathbf{A}\mathbf{P}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{P}_1] \quad (3-213)$$

式中,列向量  $\mathbf{P}_1$  为式(3-203)的能观测性判别阵  $\mathbf{Q}_o$  的逆矩阵的最后一列,即

$$\mathbf{P}_1=\mathbf{Q}_o^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3-214)$$

因此,在通过线性非奇异变换  $\mathbf{x}=\mathbf{T}_o\bar{\mathbf{x}}$  化式(3-203)为式(3-207)所示能观测标准型时,既可根据式(3-206)先确定变换矩阵  $\mathbf{T}_o$  的逆矩阵  $\mathbf{T}_o^{-1}$ ,再由矩阵  $\mathbf{T}_o^{-1}$  求逆得  $\mathbf{T}_o$ ;也可根据式(3-213)先确定变换阵  $\mathbf{T}_o$ ,再由矩阵  $\mathbf{T}_o$  求逆得  $\mathbf{T}_o^{-1}$ 。

采用式(3-207)所示的能观测标准型单输入单输出系统  $\Sigma(\bar{\mathbf{A}}_o, \bar{\mathbf{B}}_o, \bar{\mathbf{C}}_o)$ ,也可直接写出其传递函数为

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{\beta_1 s^{n-1}+\beta_2 s^{n-2}+\cdots+\beta_{n-1}s+\beta_n}{s^n+a_1 s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n} \quad (3-215)$$

从式(3-215)可以看出,传递函数分母多项式的各项系数是能观测标准型  $\Sigma(\bar{\mathbf{A}}_o, \bar{\mathbf{B}}_o, \bar{\mathbf{C}}_o)$  系统矩阵  $\bar{\mathbf{A}}_o$  的最后一列对应元素的负值,分子多项式的各项系数是  $\Sigma(\bar{\mathbf{A}}_o, \bar{\mathbf{B}}_o, \bar{\mathbf{C}}_o)$  输入阵  $\bar{\mathbf{B}}_o$  的对应元素。另一方面,根据传递函数的分母、分子多项式的系数,也可直接写出如式(3-207)所示的能观测标准型的实现  $\Sigma(\bar{\mathbf{A}}_o, \bar{\mathbf{B}}_o, \bar{\mathbf{C}}_o)$ 。

**【例 3-28】** 试将例 3-27 中的状态空间表达式变换为能观测标准型。

**解** 系统能观测性判别矩阵

$$\mathbf{Q}_o=\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

因为  $\text{rank}\mathbf{Q}_o=3=n$ ,故系统是能观测的,可化为能观测标准型。

引入线性非奇异变换  $\mathbf{x}=\mathbf{T}_o\bar{\mathbf{x}}$ ,其中变换阵  $\mathbf{T}_o$  的逆矩阵  $\mathbf{T}_o^{-1}$  由式(3-206)得

$$\mathbf{T}_o^{-1}=\begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -9 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & -2 & -7 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则

$$\mathbf{T}_o=(\mathbf{T}_o^{-1})^{-1}=\begin{bmatrix} 6 & -2 & -7 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

也可根据式(3-213)先确定变换阵  $\mathbf{T}_o$ ,再由矩阵  $\mathbf{T}_o$  求逆得  $\mathbf{T}_o^{-1}$ 。由式(3-214)得

$$\mathbf{P}_1=\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



根据式(3-213)得

$$\mathbf{T}_o = [\mathbf{P}_1 \quad \mathbf{A}\mathbf{P}_1 \quad \mathbf{A}^2\mathbf{P}_1] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

则

$$\mathbf{T}_o^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -7 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

变换后所得能观测标准型为

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{A}}_o \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}_o u \\ y = \bar{\mathbf{C}}_o \bar{\mathbf{x}} \end{cases}$$

$$\text{其中, } \bar{\mathbf{A}}_o = \mathbf{T}_o^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{B}}_o = \mathbf{T}_o^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{C}}_o = \mathbf{C} \mathbf{T}_o = [0 \quad 0 \quad 1].$$

### 3.11 传递函数矩阵的状态空间实现

本节讨论线性定常 MIMO 连续系统的状态空间实现问题。

#### 3.11.1 实现和最小实现概述

设给定线性定常 MIMO 连续系统的真或严真传递函数矩阵  $\mathbf{G}(s)$ , 若找到状态空间模型  $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  使得

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (3-216)$$

成立, 则称此状态空间模型  $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  为传递函数矩阵  $\mathbf{G}(s)$  的一个实现。由实现的定义可见, 当  $\mathbf{G}(s)$  为真有理函数矩阵时, 其实现  $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  中的输入/输出关联矩阵  $\mathbf{D}$  为

$$\mathbf{D} = \lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{G}(s) \quad (3-217)$$

而当  $\mathbf{G}(s)$  为严真有理函数矩阵时,  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ 。因此, 当  $\mathbf{G}(s)$  为真有理函数矩阵时, 可由式(3-217)首先计算输入/输出关联矩阵  $\mathbf{D}$ , 然后求严真有理函数矩阵

$$\bar{\mathbf{G}}(s) = \mathbf{G}(s) - \mathbf{D} \quad (3-218)$$

相应形式为  $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  的实现, 进而得到  $\mathbf{G}(s)$  形式为  $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  的实现。

实现的本质是对采用传递函数矩阵描述的实际系统, 在状态空间中寻找一个与其零状态外部等价的内部假想结构(状态空间描述)。研究实现问题的意义主要有如下 3 点。

① 很多分析、综合方法是基于状态空间描述开发的, 但在系统内部结构未知或内部结构非常复杂时, 无法直接建立其状态空间模型, 而通过实验, 例如对阶跃响应、频率响应的数据处理, 总可获得系统的输入、输出模型, 即 MIMO 系统的传递函数阵(或 SISO 系统的传递函数), 为了充分应用建立在状态空间模型基础上的分析、综合方法, 必须研究传递函数矩阵的状态空间实现。

② 由系统的状态空间表达式可绘制表明系统内部状态变量之间相互关系和内部结构形式的模拟实现图(状态变量图), 即获得在模拟计算机上进行系统仿真的仿真模型, 从而可基于运算放大器和复合无源网络“实现”传递函数矩阵。

③ 在长期的数值计算实践中, 已发展了一阶微分方程的各种数值积分方法, 应用数字计算机容易数值求解一阶微分方程组, 而高阶微分方程的数值求解仍十分困难, 因此, 对于给定系统

的传递函数矩阵找到一个状态空间实现是系统数值仿真分析的关键步骤之一。

由于线性非奇异变换不改变状态空间表达式所具有的传递函数矩阵,所以给定传递函数矩阵的实现有无数个。每一种实现的系统矩阵  $\mathbf{A}$  的阶次,即相应状态空间的维数标志着实现的规模大小及结构的复杂程度。由式(3-162)知,线性定常系统  $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  的能控且能观测子系统  $\Sigma(\mathbf{A}_{11}, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1)$  与  $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  有相同的传递函数阵。因此,对于传递函数矩阵  $\mathbf{G}(s)$ ,不仅其实现结果非唯一,而且其实现维数亦非唯一。在所有的实现中,维数最低的实现称为传递函数阵的最小实现。可以证明最小实现也并非唯一,但不同的最小实现是代数等价的(即两个不同的最小实现之间是线性非奇异变换关系);传递函数阵的最小实现是既能控又能观测的实现。讨论最小实现的工程实用价值在于,采用  $\mathbf{G}(s)$  的最小实现进行系统动态仿真时所用积分器最少,仿真模型结构最简,成本最低。

显然,若 SISO 系统的传递函数无零极点相消时,采用 1.3 节讨论的级联法、串联法和并联法 3 种分解方法的实现均为最小实现。若  $n$  维 SISO 线性定常系统  $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  的传递函数  $G(s)$  分子和分母有相消的公因式,即出现零、极点相消时,其  $n$  维状态空间的实现不是最小实现(视状态向量选择不同,或是能控但不能观测,或是能观测但不能控,或既不能控又不能观测,参见例 3-24),其最小实现的维数一定小于  $n$ ,可将传递函数  $G(s)$  分子和分母的公因式消去以得到最小阶传递函数,对最小阶传递函数采用 1.3 节讨论的分解方法的实现则为  $G(s)$  的最小实现,其与系统能控且能观测子系统等价。

SISO 系统传递函数的实现问题可视为 MIMO 传递函数矩阵实现问题的特例。下面主要讨论严真传递函数矩阵的实现,首先介绍能控标准型实现和能观测标准型实现这两类基本的典型实现,在此基础上讨论最小实现。

### 3.11.2 传递函数矩阵的能控标准型实现和能观测标准型实现

为了将 1.3.3 节介绍的标量传递函数能控标准型实现和能观测标准型实现推广到有  $r$  个输入、 $m$  个输出的 MIMO 系统,首先将  $m \times r$  维严真传递函数矩阵  $\mathbf{G}(s)$  表达成与式(1-125)类似的形式,即

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\boldsymbol{\beta}(s)}{\alpha(s)} = \frac{\boldsymbol{\beta}_1 s^{l-1} + \boldsymbol{\beta}_2 s^{l-2} + \cdots + \boldsymbol{\beta}_{l-1} s + \boldsymbol{\beta}_l}{s^l + \alpha_1 s^{l-1} + \cdots + \alpha_{l-1} s + \alpha_l} \quad (3-219)$$

式中,  $\alpha(s)$  为  $\mathbf{G}(s)$  所有元素的首一最小公分母,  $\boldsymbol{\beta}_j (j=1, 2, \cdots, l)$  为  $m \times r$  维常数矩阵。

对式(3-219)以有理分式矩阵描述给出的  $m \times r$  维严真传递函数矩阵  $\mathbf{G}(s)$ ,其能控标准型实现  $\Sigma_c(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c)$ 、能观测标准型实现  $\Sigma_o(\mathbf{A}_o, \mathbf{B}_o, \mathbf{C}_o)$  分别具有式(3-220)、式(3-221)所示的形式,即

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_r & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_r & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I}_r \\ -\alpha_l \mathbf{I}_r & -\alpha_{l-1} \mathbf{I}_r & -\alpha_{l-2} \mathbf{I}_r & \cdots & -\alpha_1 \mathbf{I}_r \end{bmatrix}_{rl \times rl}, \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_r \end{bmatrix}_{rl \times r} \quad (3-220)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_c &= [\boldsymbol{\beta}_l \quad \boldsymbol{\beta}_{l-1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\beta}_2 \quad \boldsymbol{\beta}_1]_{m \times rl} \\ \mathbf{A}_o &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & -\alpha_l \mathbf{I}_m \\ \mathbf{I}_m & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & -\alpha_{l-1} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m & \cdots & \mathbf{0} & -\alpha_{l-2} \mathbf{I}_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I}_m & -\alpha_1 \mathbf{I}_m \end{bmatrix}_{ml \times ml}, \quad \mathbf{B}_o = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_l \\ \boldsymbol{\beta}_{l-1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \boldsymbol{\beta}_1 \end{bmatrix}_{ml \times r} \\ \mathbf{C}_o &= [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \cdots \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{I}_m]_{m \times ml} \end{aligned} \quad (3-221)$$

式中,  $\mathbf{I}_r$ 、 $\mathbf{I}_m$  分别为  $r$  阶、 $m$  阶单位矩阵。

应该指出,  $m \times r$  维严真传递函数矩阵  $\mathbf{G}(s)$  的能控标准型实现(式(3-220))或能观测标准型实现(式(3-221))一般并不能保证为最小实现。为使实现的维数较低, 当  $m > r$  时, 宜取能控标准型实现; 而当  $m < r$  时, 则宜取能观测标准型实现。另外, 与 SISO 系统不同, 对 MIMO 系统而言, 其能控标准型实现和能观测标准型实现虽然形式上具有对偶关系, 但一般情况下, 两者并非是简单的转置。

### 3.11.3 传递函数矩阵的最小实现

由于传递函数矩阵只能表征系统中能控且能观测子系统的动力学行为, 故严真传递函数矩阵  $\mathbf{G}(s)$  的一个实现  $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  为最小实现的充分且必要条件是  $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  能控且能观测。有鉴于此, 构造严真传递函数矩阵  $\mathbf{G}(s)$  最小实现的途径之一为:

① 先找出  $\mathbf{G}(s)$  的能控标准型实现或能观测标准型实现(当输出维数大于输入维数时, 宜采用能控标准型实现, 反之则宜采用能观测标准型实现, 以降低实现的维数, 减少计算量), 再检查其能观测性或能控性, 若实现是能控且能观测的, 则为最小实现。

② 否则, 对能控标准型实现(或能观测标准型实现)按能观测性(或按能控性)进行结构分解, 找出能控且能观测子系统即为最小实现。

【例 3-29】求下列线性定常连续系统传递函数矩阵的最小实现。

$$(1) \mathbf{G}_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{s+4}{s+1} \end{bmatrix} \quad (2) \mathbf{G}_2(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{s+4}{s+1} \end{bmatrix}$$

解 (1)  $\mathbf{G}_1(s)$  为真有理函数矩阵, 其状态空间实现中的输入/输出关联矩阵  $\mathbf{D}$  为

$$\mathbf{D} = \lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{G}_1(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

相应的严真有理函数矩阵为

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{G}}_1(s) &= \mathbf{G}_1(s) - \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{3}{s+1} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 3(s+2) \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}s + \begin{bmatrix} 3 & 6 \end{bmatrix}}{s^2 + 3s + 2} \end{aligned}$$

对照式(3-219), 知

$$l=2, \alpha_1=3, \alpha_2=2, \boldsymbol{\beta}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 6 \end{bmatrix}$$

因  $m=1 < r=2$ , 故宜先采用能观测标准型实现  $\Sigma_{o1}(\mathbf{A}_o, \mathbf{B}_o, \mathbf{C}_o, \mathbf{D}_o)$ , 其中系数矩阵据式(3-221)得

$$\mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_2 \\ 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_o = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_2 \\ \boldsymbol{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_o = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Sigma_{o1}(\mathbf{A}_o, \mathbf{B}_o, \mathbf{C}_o, \mathbf{D}_o)$  一定能观, 再应用秩判据检查其能控性, 可知其能控, 故  $\Sigma_{o1}(\mathbf{A}_o, \mathbf{B}_o, \mathbf{C}_o, \mathbf{D}_o)$  即为  $\mathbf{G}_1(s)$  的一个最小实现。

(2)  $\mathbf{G}_2(s)$  为真有理函数矩阵, 其状态空间实现中的输入/输出关联矩阵  $\mathbf{D}$  为

$$\mathbf{D} = \lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{G}_2(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

相应的严真有理函数矩阵为

$$\bar{\mathbf{G}}_2(s) = \mathbf{G}_2(s) - \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{3}{s+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 \\ 3(s+2) \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}s + \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}}{s^2 + 3s + 2}$$

对照式(3-219),知

$$l=2, \alpha_1=3, \alpha_2=2, \boldsymbol{\beta}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

因  $m=2>r=1$ ,宜先采用能控标准型实现  $\Sigma_c(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c, \mathbf{D}_c)$ ,其中系数矩阵据式(3-220)得

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_c = [\boldsymbol{\beta}_2 \quad \boldsymbol{\beta}_1] = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_c = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Sigma_c(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c, \mathbf{D}_c)$ 一定能控,再应用秩判据检查其能观测性,可知其能观测,因此,  $\Sigma_c(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c, \mathbf{D}_c)$ 即为  $\mathbf{G}_2(s)$ 的一个最小实现。

【例 3-30】求下列两输入两输出线性定常连续系统传递函数矩阵的最小实现。

$$\mathbf{G}(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 1} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix}$$

解  $\mathbf{G}(s)$ 为严真有理函数矩阵,则其状态空间实现中的输入/输出关联矩阵  $\mathbf{D}=\mathbf{0}$ 。

将  $\mathbf{G}(s)$ 写成式(3-219)所示的有理分式矩阵描述形式,即

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}{s^2 + 3s + 1}$$

对照式(3-219),知

$$l=2, \alpha_1=3, \alpha_2=1, \boldsymbol{\beta}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

因为  $m=r=2$ ,故可首先在能控标准型实现和能观标准型实现中任选一种。现选择能控标准型实现  $\Sigma_c(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c)$ ,其系数矩阵据式(3-220)得

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_r \\ -\alpha_2 \mathbf{I}_r & -\alpha_1 \mathbf{I}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_c = [\boldsymbol{\beta}_2 \quad \boldsymbol{\beta}_1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

能控标准型实现  $\Sigma_c(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c)$ 一定能控,下面判断其能观测性。对于多输出系统,固然可用式(3-72)所示的秩判据判断,但计算量较大。事实上对于状态维数为  $n$  的多输出系统  $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ ,若  $\text{rank}(\mathbf{C})=q$ ,可以证明系统能观测的充要条件为

$$\text{rank} \mathbf{Q}_{n-q+1} = \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \cdots \\ \mathbf{CA} \\ \cdots \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-q} \end{bmatrix} = n \quad (3-222)$$

而对于状态维数为  $n$  的多输入系统  $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ ,若  $\text{rank}(\mathbf{B})=k$ ,则系统能控的充分必要条件为

$$\text{rank} \mathbf{Q}_{n-k+1} = \text{rank} [\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \cdots \mid \mathbf{A}^{n-k} \mathbf{B}] = n \quad (3-223)$$

由于  $q=\text{rank}(\mathbf{C}_c)=\text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}=2$ ,故

$$\text{rank} \mathbf{Q}_{n-q+1} = \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_c \\ \mathbf{C}_c \mathbf{A}_c \\ \mathbf{C}_c \mathbf{A}_c^2 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ \hline 2 & -1 & 5 & -3 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} = 2 < n = 4$$

因此,  $\Sigma_c(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c)$  不能观测, 为  $\mathbf{G}(s)$  的非最小实现。下面对  $\Sigma_c(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c)$  按能观测性进行结构分解, 以寻求  $\mathbf{G}(s)$  的一个最小实现。据式(3-148)构造非奇异变换阵  $\mathbf{P}_o$  的逆矩阵为

$$\mathbf{P}_o^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则求得

$$\mathbf{P}_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

则以  $\mathbf{P}_o$  为变换阵将  $\Sigma_c(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c)$  变换为按能观测性进行分解的规范型  $\Sigma_c(\hat{\mathbf{A}}_c, \hat{\mathbf{B}}_c, \hat{\mathbf{C}}_c)$ , 其中, 各系数矩阵为

$$\hat{\mathbf{A}}_c = \mathbf{P}_o^{-1} \mathbf{A}_c \mathbf{P}_o = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}}_c = \mathbf{P}_o^{-1} \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{C}}_c = \mathbf{C}_c \mathbf{P}_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由  $\Sigma_c(\hat{\mathbf{A}}_c, \hat{\mathbf{B}}_c, \hat{\mathbf{C}}_c)$  中能控且能观测子系统的状态空间表达式及式(3-162), 得  $\mathbf{G}(s)$  的一个最小实现为  $\Sigma_{co}(\hat{\mathbf{A}}_{co}, \hat{\mathbf{B}}_{co}, \hat{\mathbf{C}}_{co})$ , 其中, 系数矩阵为

$$\hat{\mathbf{A}}_{co} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}}_{co} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{C}}_{co} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

以上介绍的最小实现方法虽具有思路清晰的优点, 但计算量大。当严真传递函数矩阵  $\mathbf{G}(s)$  的每个元素易展开为部分分式, 且仅含单实极点时, 可按以下算法直接获得约当标准型最小实现:

① 对  $m \times r$  维  $\mathbf{G}(s)$  的每个元素进行部分分式展开, 将  $\mathbf{G}(s)$  表达成

$$\mathbf{G}(s) = \sum_{i=1}^l \frac{\mathbf{K}_i}{s + p_i} \quad (3-224)$$

式中,  $\mathbf{K}_i$  为  $m \times r$  维实常数阵。

② 确定各  $\mathbf{K}_i$  的秩  $q_i = \text{rank} \mathbf{K}_i, i = 1, 2, \dots, l$ 。

③ 将  $\mathbf{K}_i$  分解成  $q_i$  个外积项之和, 即

$$\mathbf{K}_i = \sum_{j=1}^{q_i} \mathbf{c}_{ij} \mathbf{b}_{ij}^T \quad (3-225)$$

其中, 向量  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m]^T$  与  $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r]^T$  的外积定义为

$$\alpha \rangle \langle \beta \triangleq \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_r] \quad (3-226)$$

④ 得  $\mathbf{G}(s)$  的约当标准型实现  $\Sigma_J(\mathbf{A}_J, \mathbf{B}_J, \mathbf{C}_J)$  具有式(3-227)所示的形式,即

$$\mathbf{A}_J = \begin{bmatrix} -p_1 \mathbf{I}_{q_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & -p_l \mathbf{I}_{q_l} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_J = \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1q_1} \\ \vdots \\ b_{l1} \\ \vdots \\ b_{lq_l} \end{bmatrix} \quad (3-227)$$

$$\mathbf{C}_J = [c_{11} \quad \cdots \quad c_{1q_1} \quad \cdots \quad c_{l1} \quad \cdots \quad c_{lq_l}]$$

式中,  $\mathbf{I}_{q_i}$  ( $i=1, \dots, l$ ) 为  $q_i$  阶单位矩阵。

可以看出, 1.3.3 节针对标量传递函数无零极点对消且仅含单极点时给出的并联分解实现方法是上述直接求传递函数矩阵  $\mathbf{G}(s)$  约当标准型最小实现算法的特例。

**【例 3-31】** 已知两输入两输出线性定常连续系统的传递函数矩阵为

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{2s+5}{s^2+5s+6} & \frac{2s^2+7s+7}{s^3+6s^2+11s+6} \\ \frac{3s^2+12s+11}{s^3+6s^2+11s+6} & \frac{s+1}{s^2+5s+6} \end{bmatrix}$$

试求其最小实现。

**解** 本题  $\mathbf{G}(s)$  为严真传递函数阵, 其共有 4 个元素, 即 2 个 3 阶传递函数  $G_{12}(s)$ 、 $G_{21}(s)$  和 2 个 2 阶传递函数  $G_{11}(s)$ 、 $G_{22}(s)$ , 得到  $\mathbf{G}(s)$  实现的最直接方法就是构造其各元素的实现, 然后恰当地连接起来, 但这种直接方法得到的实现维数太高(就本题而言, 共有 10 个状态变量, 相应需要 10 个单独的积分器), 并非最小实现。注意到  $\mathbf{G}(s)$  每个元素仅含单实极点, 本题采用上述直接获得约当标准型最小实现的算法求解。

将  $\mathbf{G}(s)$  中各元素按部分分式展开, 得

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+3} & \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} + \frac{2}{s+3} \\ \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+3} & -\frac{1}{s+2} + \frac{2}{s+3} \end{bmatrix}$$

再将  $\mathbf{G}(s)$  表达成式(3-224)的形式, 得

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(s) &= \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{s+2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{s+3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\mathbf{K}_1}{s+1} + \frac{\mathbf{K}_2}{s+2} + \frac{\mathbf{K}_3}{s+3} \end{aligned}$$

求取各  $\mathbf{K}_i$  的秩  $q_i$  为

$$q_1 = \text{rank} \mathbf{K}_1 = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2, \quad q_2 = \text{rank} \mathbf{K}_2 = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 1$$

$$q_3 = \text{rank} \mathbf{K}_3 = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 1$$

将  $\mathbf{K}_i$  分解成  $q_i$  个外积项之和(外积项的表示并非唯一,故这一步结果并非唯一),一种分解结果为

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{c}_{11} \langle \mathbf{b}_{11} + \mathbf{c}_{12} \rangle \langle \mathbf{b}_{12}$$

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} = \mathbf{c}_{21} \langle \mathbf{b}_{21}, \quad \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{c}_{31} \langle \mathbf{b}_{31}$$

据式(3-227)得  $\mathbf{G}(s)$  的约当标准型最小实现为  $\Sigma_J(\mathbf{A}_J, \mathbf{B}_J, \mathbf{C}_J)$ , 其中

$$\mathbf{A}_J = \left[ \begin{array}{c|c|c} -p_1 \mathbf{I}_{q_1} & & \mathbf{0} \\ \hline & -p_2 \mathbf{I}_{q_2} & \\ \hline \mathbf{0} & & -p_3 \mathbf{I}_{q_3} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{B}_J = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{11} \\ \mathbf{b}_{12} \\ \mathbf{b}_{21} \\ \mathbf{b}_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 1 & -1 \\ \hline 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_J = [\mathbf{c}_{11} \quad \mathbf{c}_{12} \vdots \mathbf{c}_{21} \vdots \mathbf{c}_{31}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

由约当标准型判据可判定  $\Sigma_J(\mathbf{A}_J, \mathbf{B}_J, \mathbf{C}_J)$  能控且能观测,又可验证  $\mathbf{C}_J(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_J)^{-1}\mathbf{B}_J = \mathbf{G}(s)$ , 故  $\Sigma_J(\mathbf{A}_J, \mathbf{B}_J, \mathbf{C}_J)$  确为  $\mathbf{G}(s)$  的最小实现。

应该指出,当传递函数矩阵  $\mathbf{G}(s)$  有元素含重极点时,以上约当标准型最小实现的算法需要修正。事实上,还有一些应用广泛的最小实现方法,如直接求取最小实现的 Hankel 法等,读者可参阅有关文献。

## 3.12 MATLAB 在能控性和能观测性分析中的应用

### 3.12.1 系统能控、能观测性分析的 MATLAB 函数

MATLAB 控制系统工具箱为系统能控性、能观测性分析提供了专用函数。

#### 1. ctrb 函数

功能:根据动态系统  $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  生成能控性判别矩阵  $\mathbf{Q}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$ 。

调用格式:  $\mathbf{Q}_c = \text{ctrb}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$

#### 2. obsv 函数

功能:根据动态系统  $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  生成能观测性判别矩阵  $\mathbf{Q}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$ 。

调用格式:  $\mathbf{Q}_o = \text{obsv}(\mathbf{A}, \mathbf{C})$

#### 3. gram 函数

功能:根据动态系统  $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  生成判别能控性、能观测性的格拉姆矩阵。

$$\mathbf{W} = \int_0^{t_f} e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{-\mathbf{A}^T t} dt$$

$$\mathbf{M} = \int_0^{t_f} e^{-\mathbf{A}^T t} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} dt$$

调用格式:  $\mathbf{W} = \text{gram}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  %生成判别能控性的格拉姆矩阵。

$M = \text{gram}(A', C')$  %生成判别能观测性的格拉姆矩阵,其中, $A', C'$ 分别为 $A, C$ 的转置。

#### 4. dgram 函数

功能:生成判别离散系统能控或能观测性的格拉姆矩阵。

调用格式:参见 gram 函数。

#### 5. ctrbf 函数

功能:将不能控系统 $\Sigma(A, B, C)$ 按能控性进行分解。

调用格式:[Abar Bbar Cbar T K]=ctrbf(A, B, C)

其中,  $A_{\text{bar}} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_c & 0 \\ A_{21} & A_c \end{bmatrix}$ ,  $B_{\text{bar}} = TB = \begin{bmatrix} 0 \\ B_c \end{bmatrix}$ ,  $C_{\text{bar}} = CT^{-1} = [C_c \quad C_c]$ ,  $T$  为变换阵,  $K$  为

包含状态能控个数信息的行向量,执行  $\text{sum}(K)$  语句即可得到能控状态数。

$\Sigma(A_c, B_c, C_c)$  为能控子系统,其与  $\Sigma(A, B, C)$  具有相同的传递函数矩阵。

#### 6. obsvf 函数

功能:将不能观测系统 $\Sigma(A, B, C)$ 按能观测性进行分解。

调用格式:[Abar, Bbar, Cbar, T, K]=obsvf(A, B, C)

其中,  $A_{\text{bar}} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_o & A_{12} \\ 0 & A_o \end{bmatrix}$ ,  $B_{\text{bar}} = TB = \begin{bmatrix} B_o \\ B_o \end{bmatrix}$ ,  $C_{\text{bar}} = CT^{-1} = [0 \quad C_o]$ ,  $T$  为变换阵,  $K$  为

包含状态能观个数信息的行向量,执行  $\text{sum}(K)$  语句即可得到能观测状态数。

$\Sigma(A_o, B_o, C_o)$  为能观测子系统,其与  $\Sigma(A, B, C)$  具有相同的传递函数矩阵。

### 3.12.2 用 MATLAB 进行系统能控性和能观测性分析举例

【例 3-32】 已知系统状态方程为:  $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ , 判别系统

的能控性。

解 MATLAB Program 3\_1 为应用秩判据求解本题的程序:

```
%MATLAB Program 3_1
A=[-2,2,-1;0,-2,0;1,-4,0];
B=[0,0;0,1;1,0];
Qc=ctrb(A,B);
n=rank(Qc);
L=length(A);
if n==L
    str='系统是状态完全能控'
else
    str='系统是状态不完全能控'
end
```

MATLAB Program 3\_1 运行结果为

```
str =
系统是状态完全能控
```



【例 3-33】 控制系统的状态空间表达式为： $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$ , 判别

系统的能观测性。

解 MATLAB Program 3\_2 为应用秩判据求解本题的程序：

```
%MATLAB Program 3_2
A=[4,1,0,0;0,4,0,0;0,0,4,1;0,0,0,4];
C=[1,1,2,1;1,2,2,0];
Q0=obsv(A,C);
r=rank(Q0);
L=size(A);
if r==L
    str='系统是状态完全能观测'
else
    str='系统是状态不完全能观测'
end
```

MATLAB Program 3\_2 运行结果为

```
str =
系统是状态不完全能观测
```

## 小 结

(1) 主要内容:系统能控性、能观测性的基本概念及其定义;线性定常和线性时变系统能控性、能观测性的判别方法;对偶原理;能控标准型与能观测标准型;线性系统的结构分解;能控性、能观测性与系统传递函数(阵)的关系及传递函数阵的实现与最小实现。

(2) 能控性和能观测性的本质:能控性、能观测性均为系统的结构特性,并在线性非奇异变换下具有不变性。能控性对应系统控制问题,反映系统外部控制输入对系统内部状态运动的支配能力;而能观测性对应系统状态估计问题,表征由系统的外部输出反映系统内部状态向量的能力。线性连续系统能控性与能观测性的对偶性为简化系统分析与综合提供了依据。

(3) 能控性、能观测性判据:针对线性连续系统和线性离散系统,介绍了判定系统能控、能观测的多种判据,在这些判据中,对于  $n$  维线性定常系统,应用最多的是能控性和能观测性的秩判据,约当标准型判据则在显式反映系统极点能控性、能观测性方面有优点。

(4) 能控标准型和能观测标准型:能控标准型和能观测标准型是反映系统完全能控和完全能观测特性的标准形式的状态空间模型,在状态反馈控制和状态观测器的综合中有重要应用。多输入多输出系统能控标准型与能观测标准型较单输入单输出系统无论是规范形式还是构造方法都要复杂得多,本章未作讨论。

(5) 线性系统的结构分解:线性定常连续系统结构分解的作用在于将系统分解为能控部分与不能控部分,或能观测部分与不能观测部分,或能控能观测、能控不能观测、不能控能观测、不能控不能观测 4 部分,以显式地揭示系统的结构特性。

(6) 系统完全能控、能观测与传递函数描述的关系:传递函数的局限性在于只能反映系统中能控且能观测子系统的动力学特性。对于单输入单输出线性定常系统,系统能控且能观测的充分必要条件是其传递函数的分子分母没有相消因子,即没有零、极点对消现象。

(7) 传递函数矩阵的实现:实现的本质是对采用传递函数矩阵描述的实际系统寻找一个与其零状态外部等价的状态空间描述,以适应系统分析和系统仿真的需要。在介绍能控标准型实现和能观标准型实现的基础上,讨论了最小实现的途径。最小实现是能控且能观测的。

## 思考题与习题 3

3-1 状态能控、能观测的含义是什么?

3-2 状态能控、能观测和系统能控、能观测这两个概念是否一样?

3-3 线性时变系统的能控、能观测性为什么要强调是初始时刻  $t_0$  上的能控、能观测性,而线性定常系统则不必强调这一点?

3-4 为什么说线性非奇异变换不改变系统的能控、能观测性?

3-5 对角标准型或约当标准型的状态空间描述,系统的能控、能观测性只与  $\mathbf{B}$  阵、 $\mathbf{C}$  阵有关,而任何线性定常系统的状态空间表达式都可化为对角型或约当型,那么任何线性定常系统的能控、能观性都只与  $\mathbf{B}$  阵、 $\mathbf{C}$  阵有关,这种说法对吗?为什么?

3-6 为什么在能观测的定义中要求一观测时间?

3-7 若  $X_1$  是能观测状态,  $X_2$  是另一能观测状态,那么  $X_1 + X_2$  一定是能观测状态吗?为什么?

3-8 对于线性定常单输入单输出  $n$  阶离散系统,为什么若初始状态经  $n$  步递推,在第  $n$  步不能转移到零,则在第  $n+1$  步及大于  $n$  的任何一步都不能转移到零?

3-9 一个系统的传递函数出现零、极点对消,为什么系统会出现或不能控、或不能观测、或既不能控也不能观测 3 种不同的结论?

3-10 一个线性定常连续系统能控、能观测,其对应的离散化系统一定能控、能观测吗?

3-11 判别下列线性定常系统的能控性。

$$(1) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$(2) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u$$

$$(3) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$(4) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u$$

3-12 判别下列线性定常系统的能观测性。

$$(1) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}, y = [1 \quad 4 \quad 2] \mathbf{x} \quad (2) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}, y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$(3) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \mathbf{x}, y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (4) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}, y = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1] \mathbf{x}$$

3-13 线性定常系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad -1] \mathbf{x} \end{cases}$$

试判别系统的状态能控性及输出能控性。

3-14 设线性系统的运动方程为

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = \dot{u} + u$$

选状态变量为  $\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} - u \end{cases}$ , 试列写该系统的状态方程与输出方程, 分析其能控性与能观测性。

3-15 线性定常系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0] \mathbf{x} \end{cases}$$

试确定系统完全能控与完全能观测时的  $a, b, c, d$  值。

3-16 判别下列线性时变连续系统的能控性。

$$(1) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, t \geq 0 \quad (2) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-2t} \end{bmatrix} u, t \geq 0$$

3-17 线性定常能控系统的状态方程中的  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

试将该状态方程变换为能控标准型。

3-18 已知能观测系统的  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [-1 \quad 1]$$

试将该状态空间表达式变换为能观测标准型。

3-19 已知线性定常系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad -1 \quad 1] \mathbf{x} \end{cases}$$

试按能控性或能观测性对其进行结构分解。

3-20 试将下列系统按能控性和能观测性进行结构分解。

$$(1) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [1 \quad 1 \quad 2]$$

$$(2) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [3 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

3-21 已知系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{s^3 + 7s^2 + 14s + 8}{s^3 + 5s^2 + 7s + 3}$$

试分别求其能控标准型实现、能观测标准型实现、最小实现。

3-22 已知系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{s+a}{s^3 + 7s^2 + 16s + 12}$$

- (1)  $a$  取何值时,使系统 3 阶的状态空间实现或为不能控,或为不能观;
- (2) 在上述  $a$  的取值下,求使系统能观但不能控的 3 阶状态空间表达式。

3-23 已知线性定常系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad -1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + u \end{cases}$$

- (1) 分析系统的能控性与能观测性;
- (2) 求系统的传递函数。

3-24 判断下列线性定常离散系统的能控性、能观测性。

$$(1) \begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = [0 \quad 1] \mathbf{x}(k) \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{cases}$$

3-25 线性定常连续系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

- (1) 设采样周期为  $T$ ,求离散化系统的状态空间表达式。
- (2) 试确定使离散化系统能控、能观测的  $T$  值。

3-26 求下列传递函数矩阵的最小实现。

$$(1) \mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s^2+3s+2} \end{bmatrix} \quad (2) \mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s}{s+2} \\ \frac{1}{s^2+3s+2} \end{bmatrix}$$

$$(3) \mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \end{bmatrix} \quad (4) \mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{s+1} & \frac{1}{s+3} \\ \frac{s}{s+1} & \frac{s+1}{s+2} \end{bmatrix}$$

3-27 直流双机传动系统如图 3-14 所示,由两台额定参数相同的他励直流电动机同轴拖动提升机构的卷筒。

试问:(1) 这两台电动机是由一个电枢电压  $u_a$  控制,还是同时由两个电枢电压  $u_{a1}$ 、 $u_{a2}$  控制合理?

(2) 若以电动机轴的角速度  $\omega$  为输出,该系统是否能观测?如不能观测,如何使系统能观测?

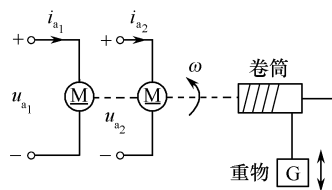


图 3-14 直流双机传动系统

3-28 设有两个能控且能观测系统  $\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$ 。

$$\Sigma_1: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y_1 = [5 \quad 1] \mathbf{x}_1 \end{cases}$$

$$\Sigma_2: \dot{x}_2 = -5x_2 + u, y_2 = x_2$$

(1) 求  $\Sigma_1$  后面串联  $\Sigma_2$  后串联系统的状态空间表达式;判断串联系统是否能控、能观测?求串联系统的传递函数。

(2) 若  $\Sigma_1$  与  $\Sigma_2$  并联,求并联系统的状态空间表达式;判断并联系统是否能控、能观测?求并联系统的传递函数。

### 上机实验题 3

3-1 系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

判断系统能控性。

3-2 系统的状态空间表达式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}, y = [1 \quad 4 \quad 2] \mathbf{x}$$

判断系统能观测性。

3-3 已知系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2.5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0] \mathbf{x} \end{cases}$$

试分析系统的能控性、能观测性。

3-4 系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{cases}$$

判断系统的能控性与能观测性。

3-5 系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad -1 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

对系统进行结构分解。

3-6 线性定常连续系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{cases}$$

试分析系统的能控性和能观测性及离散化系统的能控性和能观测性。

3-7 线性定常系统的状态空间描述为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} u \\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{cases}$$

- (1) 分析系统的能控性、能观测性；
- (2) 求系统的传递函数。

## 第4章 李亚普诺夫稳定性分析

### 4.1 引言

稳定性和能控性、能观测性一样,均是系统的结构性质。稳定性是自动控制系统能否正常工作的先决条件,因此,判别系统的稳定性及如何改善其稳定性是系统分析和综合的首要问题。一个动态系统的稳定性,通常指系统的平衡状态是否稳定。简单地说,稳定性是指系统在扰动消失后,由初始偏差状态恢复到原平衡状态的性能,其是系统的一个自身动态属性。

对线性定常系统,由经典控制理论可知,可采用劳斯-赫尔维茨代数判据和奈奎斯特频域判据判断其稳定性,这些方法均基于分析系统特征方程的根在根平面上的分布,不必求解方程,也不必求出特征根,而直接由方程的系数或频率特性曲线判断稳定性。但这种直接判别方法仅适用于线性定常系统,不适用于时变系统和非线性系统。对非线性系统和时变系统,如果采用求解方程的方法判别稳定性,通常求解工作是很困难的。虽然在经典控制理论中,对非线性系统讨论了基于频率分析的描述函数法和基于时域分析的相平面法,但描述函数法要求系统的线性部分具有良好的滤除谐波的功能,而相平面法只适用于一阶、二阶非线性系统。

1892年,俄国学者李亚普诺夫在他的博士论文“运动稳定性的一般问题”中借助平衡状态稳定与否的特征对系统或系统运动稳定性给出了严格定义,提出了解决稳定性问题的一般理论,即李亚普诺夫稳定性理论。该理论基于系统的状态空间描述法,是对单变量、多变量、线性、非线性、定常、时变系统稳定性分析皆适用的通用方法,是现代稳定性理论的重要基础和现代控制理论的重要组成部分。

基于输入、输出描述法描述的是系统的外部特性,因此,经典控制理论中的稳定性一般指输出(外部)稳定性;状态空间描述法不仅描述了系统的外部特性,且全面揭示了系统的内部特性,因此,借助平衡状态稳定与否的特征所研究的系统稳定性指状态(内部)稳定性。虽然从工程意义上看,往往更重视系统的输出稳定性,但研究系统因扰动而偏离原静止状态所产生的运动能更深刻揭示系统的稳定性。

李亚普诺夫将判断系统稳定性的问题归纳为两种方法,即李亚普诺夫第一法和李亚普诺夫第二法。

李亚普诺夫第一法(简称李氏第一法或间接法)是通过解系统的微分方程式,然后根据解的性质来判断系统的稳定性,其基本思路和分析方法与经典控制理论一致。对线性定常系统,只需解出全部特征根即可判断稳定性;对非线性系统,则采用微偏线性化的方法处理,即通过分析非线性微分方程的一次线性近似方程来判断稳定性,故只能判断在平衡状态附近很小范围的稳定性。

李亚普诺夫第二法(简称李氏第二法或直接法)的特点是不必求解系统的微分方程式,就可以对系统的稳定性进行分析判断。该方法建立在能量观点的基础上:若系统的某个平衡状态是渐近稳定的,则随着系统的运动,其存储的能量将随时间增长而不断衰减,直至 $t \rightarrow \infty$ 时,系统运动趋于平衡状态而能量趋于极小值。由此,李亚普诺夫创立了一个可模拟系统能量的“广义能量”函数,根据这个标量函数的性质来判断系统的稳定性。由于该方法不必求解系统的微分方程就能直接判断其稳定性,故又称为直接法,其最大优点在于对任何复杂系统都适用,而对于运动

方程求解困难的高阶系统、非线性系统及时变系统的稳定性分析,则更能显示出优越性。应用李氏第二法稳定理论的关键在于能否找到一个合适的“广义能量”函数,通常称此函数为李亚普诺夫函数。然而,目前对一般非线性系统尚未找到构造李亚普诺夫函数的通用方法。

本章主要介绍李氏第二法关于稳定性分析的理论及其应用。

## 4.2 外部稳定性和内部稳定性

### 4.2.1 外部稳定性

外部稳定也称有界输入-有界输出稳定(简称 BIBO 稳定),其基于系统的输入、输出描述。因为在零初始条件下定义系统输入、输出描述方可保证其唯一性,故讨论外部稳定性也以系统零初始条件为前提,其定义为:对于零初始条件的因果系统,若在任意一个有界输入  $u(t)$  作用下,对应的输出  $y(t)$  均为有界,则称该系统为外部稳定(BIBO 稳定)。

线性系统的 BIBO 稳定性可由输入、输出描述中的脉冲响应矩阵(时域分析)或传递函数矩阵(频域分析)进行分析。对于  $r$  维输入、 $m$  维输出的线性定常连续系统常用零初始条件下定义的  $m \times r$  维真或严真传递函数矩阵  $G(s)$  进行分析,其 BIBO 稳定的充分且必要条件为: $G(s)$  的所有极点均具有负实部。应该指出, $m \times r$  维传递函数矩阵  $G(s)$  的极点是其所有子式(即  $G(s)$  所有 1 阶、2 阶、 $\dots$ 、 $\min(m, r)$  阶子式)的最小公分母的零点,而  $G(s)$  所有子式的最小公分母也称为  $G(s)$  的特征多项式  $\rho_G(s)$ ,故  $G(s)$  的极点即为  $G(s)$  特征方程  $\rho_G(s) = 0$  的根。例如,给定一个  $2 \times 2$  传递函数矩阵  $G(s)$  为

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{(s-1)(s-4)} & \frac{1}{s-1} \\ \frac{1}{s-1} & 0 \end{bmatrix}$$

易确定:

$G(s)$  的 1 阶子式的最小公分母为:  $(s-1)(s-4)$

$G(s)$  的 2 阶子式的最小公分母为:  $(s-1)^2$

$G(s)$  的所有子式的最小公分母即特征多项式  $\rho_G(s)$  为:  $\rho_G(s) = (s-1)^2(s-4)$

因此该  $G(s)$  的极点为 1, 1, 4。

BIBO 稳定研究传递函数矩阵  $G(s)$  的极点是否具有负实部,这正是经典控制理论中研究的稳定性,广泛采用的分析方法是劳斯-赫尔维茨这一代数稳定判据,即由  $G(s)$  特征多项式的系数直接判断 BIBO 稳定性。

### 4.2.2 内部稳定性

内部稳定性揭示系统零输入时内部状态自由运动的稳定性,其基于系统的状态空间描述。一个没有输入信号的系统称为自治系统,因此,内部稳定性意指自治系统状态运动的稳定性,其实质上等同于李亚普诺夫意义下的渐近稳定性。李亚普诺夫关于稳定性分析的理论将在本章后续各节中讨论。

由第 2 章知,对于线性定常系统,其状态转移矩阵(即矩阵指数)包含系统自由运动的全部信息,其唯一决定了系统状态自由运动的轨迹,而状态转移矩阵又与系统矩阵的特征值密切相关。可以证明,线性定常连续系统是内部稳定即渐近稳定的充分必要条件为:系统矩阵  $A$  的全部特征值均具有负实部。



### 4.2.3 外部稳定性与内部稳定性的关系

对于线性系统, BIBO 稳定性仅从外部定性地表征系统的稳定性, 而内部稳定性则关注系统内部状态自由运动的稳定性, 这两个稳定性的联系必然与系统的能控性、能观测性密切相关。下面针对线性定常连续系统, 讨论 BIBO 稳定性与内部稳定性的关系。

(1) 若系统内部稳定, 则系统必为 BIBO 稳定

这一结论是显然的, 因为若系统内部稳定, 则其系统矩阵  $\mathbf{A}$  的全部特征值均具有负实部, 其状态转移矩阵(即矩阵指数)  $\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}$  必有界且  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} = \mathbf{0}$ , 进而可推知对于任意有界输入  $\mathbf{u}(t)$ , 对应的输出  $\mathbf{y}(t)$  必有界。事实上, 由于系统矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值集合或是等于、或是包含传递函数矩阵  $\mathbf{G}(s)$  的极点集合, 故若  $\mathbf{A}$  的全部特征值均具有负实部, 则  $\mathbf{G}(s)$  的全部极点一定均具有负实部。

(2) 若系统为 BIBO 稳定, 并不能保证系统必为内部稳定

式(3-162)揭示了传递函数矩阵  $\mathbf{G}(s)$  只能表征系统中能控且能观测子系统的动力学特性, 因此系统 BIBO 稳定仅意味着其能控且能观测子系统特征值均具有负实部, 既不要求也不表明系统其余子系统特征值均具有负实部, 故即使系统为 BIBO 稳定, 也有可能为内部不稳定。下面以 SISO 系统采用串联补偿器中不稳定零点对消被控对象中不稳定极点的设计并不能保证系统稳定工作为例进一步说明。

图 4-1(a) 为不稳定被控对象  $G_o(s)$  前串联补偿器  $G_c(s)$  的系统方块图, 图 4-1(b) 为系统的状态变量图。

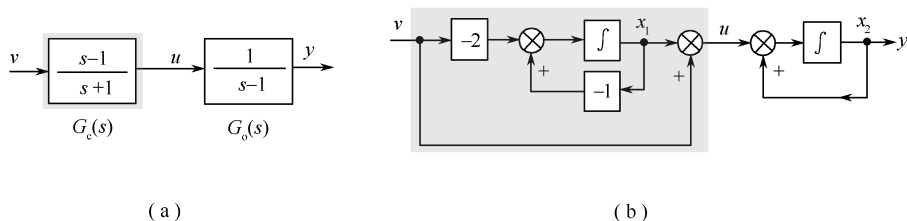


图 4-1 不稳定被控对象前串联补偿器及其状态空间实现

由图 4-1(a) 可见, 系统传递函数为

$$G(s) = G_c(s)G_o(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-1)} = \frac{1}{s+1} \quad (4-1)$$

$G(s)$  的极点为  $-1$ , 系统为 BIBO 稳定。然而, 系统传递函数由于存在零、极点对消导致其状态空间实现并非能控且能观测, 系统能控且能观测子系统的传递函数为  $1/(s+1)$ , 可见, BIBO 稳定仅表征系统能控且能观测子系统渐近稳定。由图 4-1(b) 可得系统实现  $\sum(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  的系数矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [0 \quad 1] \quad (4-2)$$

计算可知, 系统矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值为  $1, -1$ , 故系统为内部不稳定。由秩判据, 可判定系统能观测但不能控, 而且由图 4-1 可见, 由于零点  $1$  和极点  $1$  的对消发生在系统的输入通道, 使得不稳定极点  $1$  成为不能控极点, 对应模态  $\mathbf{e}^t$  不受输入控制制约, 这将使系统实际上无法稳定工作。若设系统初始时刻为  $0$ , 且初态  $\mathbf{x}_0 = [x_{10} \quad x_{20}]^T$ , 则由式(2-43)可获得系统输出的全响应为

$$y(t) = x_2(t) = \frac{1}{2}(\mathbf{e}^t - \mathbf{e}^{-t})x_{10} + \mathbf{e}^t x_{20} + \int_0^t \mathbf{e}^{-\tau} v(t-\tau) d\tau \quad (4-3)$$

若令  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ , 则由式(4-3)得

$$y(t) = \int_0^t e^{-t} v(t - \tau) d\tau \quad (4-4)$$

式(4-4)表明, 对应任一有界输入  $v(t)$ , 输出  $y(t)$  有界, 因此该系统理论上为 BIBO 稳定。但这一 BIBO 稳定的取得要求满足两个条件: 一是串联补偿器的零点与被控对象的极点精确相消; 二是零初始条件。然而, 实际系统中存在元件老化和建模误差, 故零、极点精确对消难以保证; 另一方面, 外界扰动的存在使零初始条件难以保证, 若外界扰动使  $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$  且  $x_{10} \neq -2x_{20}$ , 即使输入信号  $v(t)$  有界, 输出  $y(t)$  也将发散, 直至某些元部件饱和或损坏而使系统不能正常工作。

若将图 4-1 中的串联补偿器  $G_c(s)$  和被控对象  $G_o(s)$  的前后顺序对调, 如图 4-2 所示。显然, 图 4-2 系统的传递函数仍为式(4-1), 因此系统仍为 BIBO 稳定。图 4-1、图 4-2 系统的传递函数虽然相同, 但内部结构并不相同, 由图 4-2(b) 可得系统实现  $\sum(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  的系数矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [1 \quad 1] \quad (4-5)$$

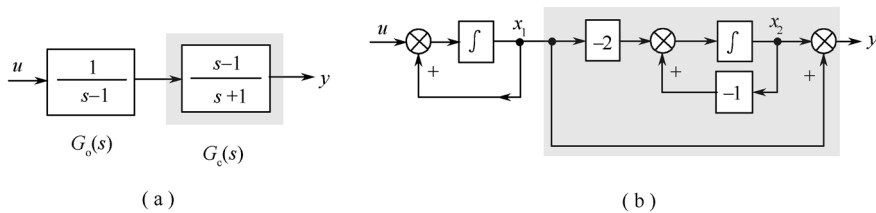


图 4-2 不稳定被控对象后串联补偿器及其状态空间实现

显然, 系统仍为内部不稳定, 且能控但不能观测。由图 4-2 可见, 由于极点 1 和零点 1 的对消发生在系统的输出通道, 使得  $G_o(s)$  中的不稳定极点 1 生成的模态  $e^t$  被  $G_c(s)$  中的零点 1 所阻断, 成为仅存在于系统内部但在输出量中却观测不到的模态。尽管在输出端观察不到模态  $e^t$ , 但这种指数上升型模态由于实际存在于系统内部, 仍将对系统正常运行产生有害后果, 导致系统饱和或损坏。

(3) 若系统能控且能观测, 则 BIBO 稳定性与内部稳定性是等价的

以上分析表明, 动态系统的内部稳定性的定义要比 BIBO 稳定性的定义严格, 仅根据传递函数矩阵的极点性质判断系统的 BIBO 稳定性有时并不能真正反映出系统稳定的性能。一个具有 BIBO 稳定的系统, 完全有可能由于内部状态运动的不稳定导致实际系统无法稳定工作。因此, 通过内部稳定性分析(即李亚普诺夫稳定性分析)能更全面而深刻地揭示出系统稳定与否。

## 4.3 李亚普诺夫稳定性的基本概念

### 4.3.1 平衡状态

稳定性实质上是系统在平衡状态下受到扰动后, 系统自由运动的性质, 与外部输入无关。对于系统自由运动, 令输入  $u = 0$ , 系统的齐次状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (4-6)$$

式中,  $\mathbf{x}$  为  $n$  维状态向量, 且显含时间变量  $t$ ;  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  为线性或非线性, 定常或时变的  $n$  维向量函数, 其展开式为

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t), i = 1, 2, \dots, n \quad (4-7)$$

式(4-6)的解为

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t; \mathbf{x}_0, t_0) \quad (4-8)$$

式中,  $t_0$  为初始时刻,  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  为状态向量的初始值。

式(4-8)描述了系统式(4-6)在  $n$  维状态空间的状态轨线。若在式(4-6)所描述的系统, 存在状态点  $\mathbf{x}_e$ , 当系统运动到达该点时, 系统状态各分量维持平衡, 不再随时间变化, 即  $\dot{\mathbf{x}}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e} = \mathbf{0}$ , 该类状态点  $\mathbf{x}_e$  即为系统的平衡状态, 即: 若系统式(4-6)存在状态向量  $\mathbf{x}_e$ , 对所有时间  $t$ , 都使

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_e, t) = \mathbf{0} \quad (4-9)$$

成立, 则称  $\mathbf{x}_e$  为系统的平衡状态。由平衡状态在状态空间中所确定的点, 称为平衡点。

式(4-9)为确定式(4-6)所描述系统平衡状态的方程。

对线性定常系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (4-10)$$

其平衡状态  $\mathbf{x}_e$  应满足代数方程  $\mathbf{A}\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 。解此方程, 若  $\mathbf{A}$  非奇异, 则系统存在唯一的平衡状态  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ , 即状态空间原点为系统唯一的平衡点; 但若  $\mathbf{A}$  奇异, 则系统存在无穷多个平衡状态。

对非线性系统, 平衡方程式(4-9)的解可能有多个, 视系统方程而定。

**【例 4-1】** 设系统的状态方程为  $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_2^3 \end{cases}$ , 求其平衡状态。

**解** 其平衡状态应满足平衡方程式(4-9), 即

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_2^3 = 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} -x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_2^3 = 0 \end{cases}$$

解之, 得系统存在 3 个孤立的平衡状态

$$\mathbf{x}_{e_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_{e_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

应该指出, 因为对于任意一个孤立的非零平衡状态, 均可通过坐标变换移至  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  处, 故为了方便, 本章只讨论式(4-6)所描述的系统在平衡状态  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  处的稳定性问题。

### 4.3.2 范数

$n$  维状态空间中, 向量  $\mathbf{x}$  的长度(即  $\mathbf{x}$  到坐标原点的距离)称为向量  $\mathbf{x}$  的范数, 并用  $\|\mathbf{x}\|$  表示, 即

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = (\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{\frac{1}{2}} \quad (4-11)$$

而向量  $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_e)$  的长度(即  $\mathbf{x}$  到  $\mathbf{x}_e$  的距离)称为  $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_e)$  的范数, 并用  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_e\|$  表示, 即

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_e\| = \sqrt{(x_1 - x_{e_1})^2 + (x_2 - x_{e_2})^2 + \cdots + (x_n - x_{e_n})^2} \quad (4-12)$$

在  $n$  维状态空间中, 若用点集  $S(\epsilon)$  表示以  $\mathbf{x}_e$  为中心、 $\epsilon$  为半径的超球域, 那么,  $\mathbf{x} \in S(\epsilon)$ , 则表示

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_e\| = \sqrt{(x_1 - x_{e_1})^2 + (x_2 - x_{e_2})^2 + \cdots + (x_n - x_{e_n})^2} \leq \epsilon \quad (4-13)$$

设  $\mathbf{x}_e$  为系统的平衡状态, 有扰动使系统在  $t = t_0$  时的状态为  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , 若用点集  $S(\delta)$  表示以  $\mathbf{x}_e$  为中心、 $\delta$  为半径的闭球域, 那么, 系统的初始条件  $\mathbf{x}_0 \in S(\delta)$ , 则可用初始偏差向量  $(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e)$  的范数表示, 即

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e\| \leq \delta \quad (4-14)$$

另外, 用点集  $S(\epsilon)$  表示以  $\mathbf{x}_e$  为中心、 $\epsilon$  为半径的闭球域, 那么, 若式(4-6)的解  $\mathbf{x}(t) = \Phi(t; \mathbf{x}_0, t_0) \in S(\epsilon)$ , 即系统式(4-6)在  $n$  维状态空间中从初始条件  $(t_0, \mathbf{x}_0)$  出发的运动轨迹均位于闭球

域  $S(\epsilon)$  内,则可用范数表示为

$$\|\Phi(t; x_0, t_0) - x_e\| \leq \epsilon, t \geq t_0 \quad (4-15)$$

### 4.3.3 李亚普诺夫稳定性定义

#### 1. 李亚普诺夫意义下稳定

设  $x_e$  为动力学系统式(4-6)的平衡状态,若对任意实数  $\epsilon > 0$ ,都对应存在另一实数  $\delta(\epsilon, t_0) > 0$ ,使当

$$\|x_0 - x_e\| \leq \delta(\epsilon, t_0) \quad (4-16)$$

时,系统式(4-6)从任意初始状态  $x(t_0) = x_0$  出发的解都满足

$$\|\Phi(t; x_0, t_0) - x_e\| \leq \epsilon, t_0 < t < \infty \quad (4-17)$$

则称平衡状态  $x_e$  为李亚普诺夫意义下稳定,其中,  $\delta(\epsilon, t_0)$  与  $\epsilon$  和  $t_0$  有关;若  $\delta$  与  $t_0$  无关,则称这种平衡状态  $x_e$  是一致稳定的。对定常系统而言,  $\delta$  与  $t_0$  无关,稳定的平衡状态一定为一致稳定。

上述稳定性的定义中,范数  $\|\Phi(t; x_0, t_0) - x_e\| \leq \epsilon$  表示式(4-6)的解  $x(t) = \Phi(t; x_0, t_0)$  的所有各点均位于以  $x_e$  为中心、 $\epsilon$  为半径的闭球域  $S(\epsilon)$  内;与此对应,可找到另一个以  $x_e$  为中心、 $\delta$  为半径的闭球域  $S(\delta)$ ,其限制了初始状态  $x_0$  允许取值的范围,即  $\|x_0 - x_e\| \leq \delta$ 。李亚普诺夫意义下稳定是指当  $t$  无限增加时,从初始状态  $x_0 \in S(\delta)$  出发的状态轨迹(即式(4-6)的解)总不会超出闭球域  $S(\epsilon)$ ,即系统状态响应的幅值是有界的。在二维状态空间中,上述李亚普诺夫意义下稳定的几何解释如图 4-3 所示。

#### 2. 渐近稳定(经典控制理论稳定性定义)

设  $x_e$  为动力学系统式(4-6)的平衡状态,若对任意实数  $\epsilon > 0$ ,对应存在另一实数  $\delta(\epsilon, t_0) > 0$ ,使当  $\|x_0 - x_e\| \leq \delta(\epsilon, t_0)$  时,从任意初始状态  $x(t_0) = x_0$  出发的解都满足

$$\|\Phi(t; x_0, t_0) - x_e\| \leq \epsilon, t \geq t_0$$

且对于任意小量  $\mu > 0$ ,总有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi(t; x_0, t_0) - x_e\| \leq \mu \quad (4-18)$$

则称平衡状态  $x_e$  是渐近稳定的。若  $\delta$  与  $t_0$  无关,则称这种平衡状态  $x_e$  是一致渐近稳定的。

渐近稳定的几何意义可理解为:如果平衡状态  $x_e$  为李亚普诺夫意义下稳定,且从球域  $S(\delta)$  内发出的状态轨迹(即式(4-6)的解),当  $t \rightarrow \infty$  时,不仅不超出球域  $S(\epsilon)$  之外,而且最终收敛于  $x_e$ ,则平衡状态  $x_e$  为渐近稳定。在二维状态空间中,渐近稳定的几何解释如图 4-4 所示。

#### 3. 大范围渐近稳定性

若初始条件扩展至整个状态空间,即  $\delta \rightarrow \infty, S(\delta) \rightarrow \infty$ ,且平衡状态  $x_e$  均具有渐近稳定性时,则称此平衡状态  $x_e$  是大范围内渐近稳定的。若  $x_e$  大范围内渐近稳定,当  $t \rightarrow \infty$  时,由状态空间中任一初始状态  $x_0$  出发的状态轨迹(即式(4-6)的解)都收敛于  $x_e$ 。显然,大范围内渐近稳定的必要条件是在整个状态空间只有唯一平衡状态。

在控制工程中确定渐近稳定性的范围是很重要的。对于严格线性的系统,如果平衡状态是渐近稳定的,那必定是大范围内渐近稳定的,这是因为线性系统的稳定性只取决于系统的结构和参数,而与初始条件的大小无关,因此,线性系统的稳定性是全局性的。而对于非线性系统,稳定性与初始条件大小密切相关,使平衡状态  $x_e$  为渐近稳定的闭球域  $S(\delta)$  一般是不大的,对多个平衡点的情况更是如此,故通常只能在小范围内渐近稳定。因此,非线性系统的稳定性是局域性的。一般来说,渐近稳定性是个局部的性质,知道渐近稳定性的范围,才能明了这一系统的抗干扰程度,从而可以设法抑制干扰的大小,使它能满足系统稳定性的要求。

#### 4. 不稳定性

设  $\mathbf{x}_e$  为动力学系统式(4-6)的平衡状态,若对某个实数  $\epsilon > 0$  和另一实数  $\delta > 0$ ,当  $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e\| \leq \delta$  时,总存在一个初始状态  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ ,使

$$\|\Phi(t; \mathbf{x}_0, t_0) - \mathbf{x}_e\| > \epsilon, t \geq t_0 \quad (4-19)$$

则称平衡状态  $\mathbf{x}_e$  是不稳定的。

不稳定的几何意义可理解为:对于某个给定的球域  $S(\epsilon)$ ,无论球域  $S(\delta)$ 取得多么小,内部总存在一个初始状态  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ ,使得从这一状态出发的轨迹最终会超出球域  $S(\epsilon)$ 。在二维状态空间中,不稳定的几何解释如图 4-5 所示。

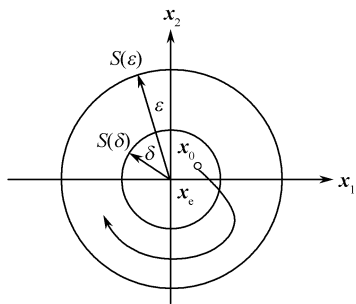


图 4-3 李亚普诺夫意义下稳定

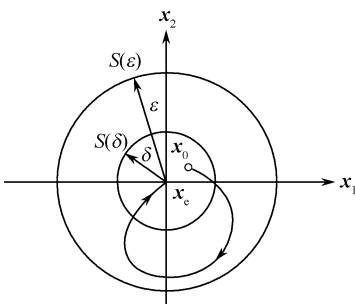


图 4-4 渐近稳定

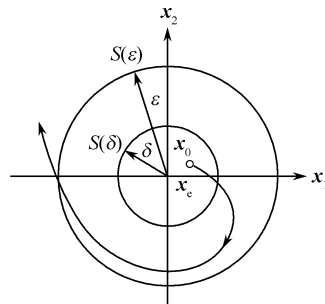


图 4-5 不稳定

应该指出,对于不稳定平衡状态的轨迹,虽然越出了  $S(\epsilon)$ ,但并不意味着轨迹一定趋向无穷远处,例如对于非线性系统,轨迹可能趋于  $S(\epsilon)$ 以外的某个平衡点。不过对于线性系统,从不稳定平衡状态出发的轨迹,理论上一定趋于无穷远。

从上述李亚普诺夫稳定性定义可以看出,只要系统自由运动的状态轨线不超出闭球域  $S(\epsilon)$  (即系统自由响应  $\mathbf{x}(t) = \Phi(t; \mathbf{x}_0, t_0)$  有界),则称平衡状态  $\mathbf{x}_e$  为李亚普诺夫意义下稳定。经典控制理论中的稳定性定义与渐近稳定性定义对应。在经典控制理论中,只有渐近稳定的系统才称为稳定系统。只在李亚普诺夫意义下稳定,但不是渐近稳定的系统则称临界稳定系统,这在工程上属于不稳定系统。

### 4.4 李亚普诺夫稳定性定理

本章引言已指出,李亚普诺夫稳定性理论提出了判断系统稳定性的两种方法,即李氏第一法(间接法)和李氏第二法(直接法)。李氏第一法利用状态方程解的性质来判断系统的稳定性,其适用于线性定常、线性时变及非线性函数可线性化的情况,关于李氏第一法将在 4.5 节、4.7 节介绍。李氏第二法无须求解状态方程而借助于象征广义能量的李亚普诺夫函数  $V(\mathbf{x}, t)$  及其对时间的导数  $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$  的符号特征,直接判断平衡状态的稳定性,其提供了判别所有系统稳定性的通用方法,本节主要讲解李氏第二法。尽管李亚普诺夫函数  $V(\mathbf{x}, t)$  的选取并非唯一,且目前尚未找到对任何系统都普遍适用的构造  $V(\mathbf{x}, t)$  的一般方法,但实际表明,许多情况下  $V(\mathbf{x}, t)$  可取为二次型函数,因此,线性代数理论中的二次型函数及标量函数的定号性是李氏第二法的数学基础之一。

#### 4.4.1 二次型函数及其定号性

##### 1. 二次型函数及二次型的矩阵表达式

二次型函数是一类特殊的标量函数,其可表示为

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (4-20)$$

式中,  $\mathbf{P}$  为二次型各项的系数构成的  $n \times n$  维实对称矩阵, 称为二次型式(4-20)的权矩阵, 即

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (4-21)$$

式中,  $a_{ij}$  为实数, 且  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $i, j = 1, 2, \cdots, n$ 。

式(4-20)表明, 二次型函数  $V(\mathbf{x})$  和其权矩阵  $\mathbf{P}$  一一对应, 可将二次型函数的定号性扩展到其对应权矩阵的定号性。

若二次型函数的权矩阵  $\mathbf{P}$  为  $n$  阶实对角矩阵, 则对应的二次型只含平方项, 称为二次型的标准型, 即

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (4-22)$$

标准型式(4-22)是二次型函数中的最简单形式。由线性代数理论可知, 任意一个二次型都可经线性非奇异变换化为标准型。

## 2. 标量函数 $V(\mathbf{x})$ 的符号和性质

设  $V(\mathbf{x})$  为由  $n$  维状态向量  $\mathbf{x}$  所定义的标量函数,  $\mathbf{x} \in \Omega$ , 且在  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  处, 恒有  $V(\mathbf{x}) = 0$ 。对所有在域  $\Omega$  中的任何非零向量  $\mathbf{x}$ , 如果:

(1)  $V(\mathbf{x}) > 0$ , 则称  $V(\mathbf{x})$  为正定的。例如,  $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2$  正定。

(2)  $V(\mathbf{x}) \geq 0$ , 则称  $V(\mathbf{x})$  为半正定的。例如,  $V(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2)^2$  半正定。

(3)  $V(\mathbf{x}) < 0$ , 即  $-V(\mathbf{x})$  为正定的, 则称  $V(\mathbf{x})$  为负定的。例如,  $V(\mathbf{x}) = -(x_1^2 + 2x_2^2)$  负定。

(4)  $V(\mathbf{x}) \leq 0$ , 即  $-V(\mathbf{x})$  为半正定的, 则称  $V(\mathbf{x})$  为半负定的。例如,  $V(\mathbf{x}) = -(x_1 + x_2)^2$  半负定。

(5)  $V(\mathbf{x})$  既可为正值也可为负值, 则称  $V(\mathbf{x})$  为不定。例如,  $V(\mathbf{x}) = x_1 x_2 + x_2^2$  不定。

在式(4-20)中, 若  $V(\mathbf{x})$  正定, 则称权矩阵  $\mathbf{P}$  是正定的, 且记为  $\mathbf{P} > 0$ 。依次类推, 可定义二次型权矩阵  $\mathbf{P}$  的负定、半正定、半负定, 并分别记为  $\mathbf{P} < 0$ 、 $\mathbf{P} \geq 0$ 、 $\mathbf{P} \leq 0$ 。可见, 二次型函数  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$  的定号性与其对应的权矩阵  $\mathbf{P}$  的定号性一致, 判别  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$  的符号只要判别实对称矩阵  $\mathbf{P}$  的符号即可。

简单的二次型函数的定号性可根据定义直接判定, 复杂的二次型函数的定号性则可由关于实对称矩阵定号性的塞尔维斯特(Sylvester)准则来确定。作为要用到的线性代数知识, 先介绍  $n$  阶方阵  $\mathbf{P}$  的主子式、顺序主子式的定义: 从矩阵  $\mathbf{P}$  中删去任意  $m$  行和相应序号  $m$  列后得到的  $n-m$  阶子式称为  $\mathbf{P}$  的  $n-m$  阶主子式,  $\mathbf{P}$  共有  $2^n - 1$  个主子式。从矩阵  $\mathbf{P}$  的第 1 行第 1 列元素  $p_{11}$  开始, 顺序增加下面一行和一列形式的子式称为  $\mathbf{P}$  的顺序主子式,  $\mathbf{P}$  共有  $n$  个顺序主子式。

## 3. 塞尔维斯特(Sylvester)准则

(1) 实对称矩阵  $\mathbf{P}$  为正定的充要条件是矩阵  $\mathbf{P}$  的各阶顺序主子式均大于零, 即在式(4-21)中, 有

$$\Delta_1 = a_{11} > 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0; \cdots; \Delta_n = \det \mathbf{P} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0 \quad (4-23)$$

(2) 实对称矩阵  $\mathbf{P}$  为负定的充要条件是矩阵  $\mathbf{P}$  的各阶顺序主子式满足

$$(-1)^i \Delta_i > 0, i=1, 2, \cdots, n \quad (4-24)$$

即

$$\begin{cases} \Delta_i > 0, i \text{ 为偶数} \\ \Delta_i < 0, i \text{ 为奇数} \end{cases} \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

(3) 若实对称矩阵  $\mathbf{P}$  为奇异矩阵, 且它的所有主子式皆非负, 则  $\mathbf{P}$  为半正定。若  $-\mathbf{P}$  为半正定矩阵, 则  $\mathbf{P}$  为半负定矩阵。

注意: 上述判别准则(3)中指的是主子式而不是顺序主子式。事实上, 只有顺序主子式非负, 并不能保证实对称矩阵  $\mathbf{P}$  是半正定的。

**【例 4-2】** 已知  $V(\mathbf{x}) = 10x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 4x_1x_3$ , 试判定  $V(\mathbf{x})$  是否正定。

**解** 二次型函数  $V(\mathbf{x})$  可写成矩阵形式, 即

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

则权矩阵  $\mathbf{P}$  的各阶顺序主子式为

$$\Delta_1 = 10 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 39 > 0, \Delta_3 = \det \mathbf{P} = \begin{vmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 17 > 0$$

可见, 权矩阵  $\mathbf{P}$  的各阶顺序主子式均大于零, 由 Sylvester 准则可确定二次型  $V(\mathbf{x})$  正定。

**【例 4-3】** 判断实对称矩阵  $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$  的定号性。

**解** 顺序主子式为  $\Delta_1 = 1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \Delta_3 = \det \mathbf{P} = 0$

表明  $\mathbf{P}$  不是正定阵, 但并不说明  $\mathbf{P}$  为半正定。应进一步查看其余 4 个主子式:  $a_{22} = 1 > 0, a_{33} = 1 > 0, \Delta_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 < 0, \Delta_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 < 0$ , 可见并非所有主子式皆非负, 因此  $\mathbf{P}$  不是半正定的。进一步分析可知矩阵  $\mathbf{P}$  是不定的。

#### 4.4.2 李亚普诺夫第二法

**定理 4-1**(李亚普诺夫稳定性的基本定理) 设系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (4-25)$$

且其平衡状态为  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ , 即有

$$\mathbf{f}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0} \quad (4-26)$$

如果存在一个具有连续一阶偏导数的标量函数  $V(\mathbf{x}, t)$ , 且  $V(\mathbf{x}, t)$  及其对时间的导数  $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$  满足以下条件:

(1)  $V(\mathbf{x}, t)$  是正定的;

(2)  $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$  是负定的。

则系统的平衡状态  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  是一致渐近稳定的, 并称  $V(\mathbf{x}, t)$  是系统的一个李亚普诺夫函数。

进一步, 若  $V(\mathbf{x}, t)$  还满足

(3)  $\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} V(\mathbf{x}, t) = \infty$

则系统的平衡状态  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  是大范围一致渐近稳定的。

定理 4-1 是一个最基本的稳定性判别定理, 对所有系统皆适用。但该定理只给出了判断系统平衡状态渐近稳定的充分条件, 而非充要条件。即对给定系统, 若在平衡状态附近找到满足上述条件的李亚普诺夫函数  $V(\mathbf{x}, t)$ , 则可判定该平衡状态是渐近稳定的; 但若找不到满足条件的函数  $V(\mathbf{x}, t)$ , 并不能判定该平衡状态不是渐近稳定或不稳定的。

**【例 4-4】** 已知非线性系统状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

试分析其平衡状态的稳定性。

**解** 由系统平衡状态的方程

$$\begin{cases} x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) = 0 \\ -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) = 0 \end{cases}$$

解出唯一平衡状态  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ , 即状态空间原点是其唯一平衡状态。

李亚普诺夫函数  $V(\mathbf{x})$  的存在形式并非唯一, 许多情况下, 可取为正定的二次型函数形式。本例选取标准二次型为李亚普诺夫函数, 即  $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$ , 该函数是正定的。 $V(\mathbf{x})$  沿任意状态轨迹对时间的导数为

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2$$

将系统状态方程代入上式, 得

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 2x_1[x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)] + 2x_2[-x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)] = -2(x_1^2 + x_2^2)^2$$

显然, 有  $\dot{V}(\mathbf{0}) = 0$ ; 且当  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  时,  $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ , 故  $\dot{V}(\mathbf{x})$  负定。因此, 所选  $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$  是满足定理 4-1 条件的一个李亚普诺夫函数。而且当  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$  时,  $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ , 根据定理 4-1, 系统在平衡点  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  处为大范围渐近稳定。

应用李亚普诺夫稳定性基本定理(定理 4-1)的主要困难在于构造实际系统的李亚普诺夫函数, 其主要依靠经验和技巧, 并无一般规律可循。事实上, 对相当一部分系统, 要构造一个正定的李亚普诺夫函数  $V(\mathbf{x})$ , 使其满足定理 4-1 中所要求的  $\dot{V}(\mathbf{x})$  为负定这一条件, 常常不易做到。为此, 李亚普诺夫给出定理 4-2 的形式, 将定理 4-1 中的  $\dot{V}(\mathbf{x})$  为负定这一条件放宽到要求  $\dot{V}(\mathbf{x})$  半负定, 在此基础上再附加限制条件, 来判断渐近稳定性。

**定理 4-2**(渐近稳定判定定理 2) 设系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (4-27)$$

且其平衡状态为  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ , 即有

$$\mathbf{f}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0} \quad (4-28)$$

如果存在一个具有连续一阶偏导数的标量函数  $V(\mathbf{x}, t)$ , 且  $V(\mathbf{x}, t)$  及其对时间的导数  $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$  满足以下条件:



(1)  $V(\mathbf{x}, t)$  是正定的;

(2)  $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$  是半负定的;

(3) 但  $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$  在方程式(4-23)的非零解状态运动轨线上不恒等于零。

则系统在状态空间原点处的平衡状态是渐近稳定的。

进一步,若还有  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$  时,  $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ , 则系统的平衡状态  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  是大范围一致渐近稳定的。

在定理 4-2 中,定理 4-1 的条件(2)( $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$  负定)被放宽为  $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$  半负定,为了判断渐近稳定性,定理 4-2 提供了附加条件(3),即  $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$  在方程式(4-27)的非零解状态运动轨线上不恒等于零。这是因为  $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$  既然是半负定的,则在  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  时,可能会出现  $\dot{V}(\mathbf{x}, t) = 0$ , 而这时系统自由运动可能有两种情况:

(1)  $\dot{V}(\mathbf{x}, t) \equiv 0$ , 则  $V(\mathbf{x}, t) \equiv C$ , 即状态运动轨迹将落在某个特定的曲面  $V(\mathbf{x}, t) \equiv C$  上,而不会收敛于  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  的平衡状态,这可能对应于非线性系统中出现的极限环或线性系统中的临界稳定,系统在原点处的平衡状态为在李亚普诺夫意义下稳定,但非渐近稳定。

(2)  $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$  不恒等于零,只在某个时间段暂时为零,而其他时刻均为负值,则状态运动轨迹不会停留在某一定值  $V(\mathbf{x}, t) = C$  上,而是向原点收敛,系统在原点处的平衡状态为渐近稳定。

**定理 4-3**(判断稳定和不安定的定理) 设系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

其平衡状态为  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ , 即有

$$\mathbf{f}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}$$

且存在一个具有连续一阶偏导数的标量函数  $V(\mathbf{x}, t)$ 。若  $V(\mathbf{x}, t)$  及其对时间的导数  $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$  满足

(1)  $V(\mathbf{x}, t)$  是正定的;

(2)  $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$  是半负定的。

则系统原点处的平衡状态在李亚普诺夫意义下是一致稳定的。

若  $V(\mathbf{x}, t)$  及其对时间的导数  $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$  满足

(1)  $V(\mathbf{x}, t)$  是正定的;

(2)  $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$  也是正定的。

则系统在原点处的平衡状态是不稳定的。

**【例 4-5】** 设系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases}$$

试确定平衡状态的稳定性。

**解** 系统为线性定常系统,且系统矩阵非奇异,故状态空间原点  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  为该系统唯一的平衡状态。选取标准二次型作为一个可能的李亚普诺夫函数,即

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$$

该函数是正定的,  $V(\mathbf{x})$  沿任意状态轨迹对时间的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\ &= 2x_1x_2 + 2x_2(-x_1 - x_2) = -2x_2^2 \leq 0 \end{aligned}$$

可见,  $\dot{V}(\mathbf{x})$  是半负定的。由定理 4-3 知, 系统在原点处的平衡状态一定是李亚普诺夫意义下一致稳定的。但为了进一步判定是否渐近稳定, 则应判断  $\dot{V}(\mathbf{x})$  在非零解运动轨线是否恒为零。

设  $\dot{V}(\mathbf{x}) = -2x_2^2 \equiv 0$ , 则有  $x_2(t) \equiv 0$ , 即有  $x_2(t) = 0$  和  $\dot{x}_2(t) = 0$ , 代入系统状态方程得  $\dot{x}_1(t) = 0$  和  $x_1(t) = 0$ 。这就表明, 只有在状态空间原点  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ , 才有  $\dot{V}(\mathbf{x}) \equiv 0$ ; 而在非零解运动轨线上,  $\dot{V}(\mathbf{x})$  不可能恒等于零。则由定理 4-2 知,  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  是渐近稳定的平衡状态。又  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$  时,  $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ , 故进一步可确定系统的平衡状态  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  是大范围一致渐近稳定的。

事实上, 李亚普诺夫函数  $V(\mathbf{x})$  的存在形式并非唯一, 对该例, 若另选下列正定二次型函数

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}[(x_1 + x_2)^2 + 2x_1^2 + x_2^2] = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

为另一个可能的李亚普诺夫函数。则  $V(\mathbf{x})$  沿任意状态轨迹对时间的导数

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2)(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + 2x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = -(x_1^2 + x_2^2)$$

是负定的, 因此, 所选  $V(\mathbf{x})$  为系统的一个李亚普诺夫函数。又  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$  时,  $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ , 根据定理 4-1, 原点处的平衡状态在大范围内渐近稳定。

**【例 4-6】** 设系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$$

式中,  $a$  为大于零的常数, 试分析其平衡状态的稳定性。

**解** 原点  $(x_1 = 0, x_2 = 0)$  是系统的唯一平衡状态。试选下列正定二次型函数

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + ax_2^2$$

为可能的李亚普诺夫函数。则

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 2x_1\dot{x}_1 + 2ax_2\dot{x}_2 = 2ax_1x_2 - 2ax_1x_2 \equiv 0$$

可见, 在任意非零解运动轨线上,  $\dot{V}(\mathbf{x})$  恒等于零, 因此, 系统为在李亚普诺夫意义下稳定, 但非渐近稳定。事实上, 在任意  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  上,  $\dot{V}(\mathbf{x})$  均可保持为零, 而  $V(\mathbf{x})$  则保持为某常数, 即

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + ax_2^2 = C$$

这表示系统自由运动的相轨迹是一系列以原点为中心的椭圆, 即系统的零输入响应为无阻尼等幅振荡, 系统为在李亚普诺夫意义下稳定。但在经典控制理论中, 这种系统称为不稳定系统。

**【例 4-7】** 设系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases}$$

试分析其平衡状态的稳定性。

**解** 原点  $(x_1 = 0, x_2 = 0)$  是系统的唯一平衡状态。试选  $V(\mathbf{x})$  为下列正定二次型函数

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}[(x_1 + x_2)^2 + 2x_1^2 + x_2^2] = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$V(\mathbf{x})$ 沿任意状态轨迹对时间的导数

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2)(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + 2x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = (x_1 + x_2)x_1 - 2x_1x_2 + x_2(x_1 + x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

也是正定的。由定理 4-3,该系统在原点处的平衡状态不稳定。

## 4.5 线性定常系统李亚普诺夫稳定性分析

### 4.5.1 李亚普诺夫第一法(间接法)

李氏第一法是利用状态方程的解的特性来判断系统稳定性的方法,适用于线性定常、线性时变及非线性函数可线性化的情况。经典控制理论中关于线性定常系统稳定性的各种判据,均可视为李氏第一法在线性系统中的工程应用。在分析线性定常系统稳定性时,可按经典控制理论的思路,直接由系统矩阵的特征值判断系统的稳定性。

**定理 4-4** 设线性定常连续系统自由运动的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (4-29)$$

则系统在  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  平衡状态渐近稳定的充要条件是系统矩阵  $\mathbf{A}$  的所有特征值均具有负实部。

如前所述,对于由非奇异矩阵  $\mathbf{A}$  描述的线性定常连续系统式(4-29),因为其只有唯一的平衡状态  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ ,所以关于平衡状态  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  的渐近稳定性和“系统的”渐近稳定性完全一致。当平衡状态  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  渐近稳定时,必是大范围内一致渐近稳定。

应该指出,由于线性定常连续系统和线性定常离散系统的动态数学模型之间的相似性,两者之间不仅在求解方法、响应分解及能控性、能观测性方面有相似之处,而且在稳定性上也存在相似性。例如,线性定常离散系统稳定性分析的特征值判据(定理 4-5)则与线性定常连续系统特征值判据(定理 4-4)相似。

**定理 4-5** 设线性定常离散系统自由运动的状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) \quad (4-30)$$

则系统在  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  平衡状态渐近稳定的充要条件是系统矩阵  $\mathbf{G}$  的所有特征值的模都小于 1。

应用李氏第一法判定线性定常系统稳定性,必须求出系统矩阵的全部特征值,这一点对于高阶系统或系统特征多项式的某些系数不是数值时较为困难,由经典控制理论知,在这种情况下,利用劳斯判据比较方便。在 4.5.2 节将应用李氏第二法分析线性定常系统的稳定性,所得结论较经典控制理论中的劳斯-赫尔维茨判据适用范围更宽。

### 4.5.2 李亚普诺夫第二法

#### 1. 线性定常连续系统

**定理 4-6** 设线性定常连续系统为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (4-31)$$

式中,  $\mathbf{x}$  为  $n$  维状态向量,系统矩阵  $\mathbf{A}$  为  $n$  阶非奇异常数阵。则系统平衡状态  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  为大范围渐近稳定的充要条件是:对任意给定的正定实对称矩阵  $\mathbf{Q}$ ,存在另一个正定实对称矩阵  $\mathbf{P}$ ,满足式(4-32)表示的李亚普诺夫方程

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q} \quad (4-32)$$

而标量函数

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (4-33)$$

是系统的一个二次型形式的李亚普诺夫函数。

**证明** 充分性。因为  $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$  均为正定实对称矩阵且满足李亚普诺夫方程式(4-32), 故取正定二次型  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$  为一个可能的李亚普诺夫函数, 则  $V(\mathbf{x})$  沿任意状态轨迹对时间的导数

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} = \mathbf{x}^T (-\mathbf{Q}) \mathbf{x}$$

$\mathbf{Q}$  正定, 则  $-\mathbf{Q}$  负定,  $\dot{V}(\mathbf{x})$  负定, 故  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  是大范围渐近稳定的平衡状态。

必要性。如果系统式(4-31)在  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  渐近稳定, 那么在时间  $t$  趋于无穷大时, 系统的状态转移矩阵  $e^{\mathbf{A}t}$  必趋于零。任选一个正定实对称矩阵  $\mathbf{Q}$ , 构造时变对称矩阵

$$\mathbf{M}(t) = e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{Q} e^{\mathbf{A}t} \quad (4-34)$$

其满足  $\mathbf{M}(0) = \mathbf{Q}$  和  $\mathbf{M}(\infty) = \mathbf{0}$ , 而且  $\mathbf{M}(t)$  是矩阵微分方程

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}}(t) = \mathbf{A}^T \mathbf{M}(t) + \mathbf{M}(t) \mathbf{A} \\ \mathbf{M}(0) = \mathbf{Q} \end{cases} \quad (4-35)$$

的唯一解。对式(4-35)中的第一式两端从  $t=0$  到  $t=\infty$  积分, 得

$$\mathbf{M}(\infty) - \mathbf{M}(0) = \mathbf{A}^T \int_0^\infty \mathbf{M}(t) dt + \left( \int_0^\infty \mathbf{M}(t) dt \right) \mathbf{A}$$

将  $\mathbf{M}(0) = \mathbf{Q}$  和  $\mathbf{M}(\infty) = \mathbf{0}$  代入上式, 得

$$\mathbf{A}^T \int_0^\infty \mathbf{M}(t) dt + \left( \int_0^\infty \mathbf{M}(t) dt \right) \mathbf{A} = -\mathbf{Q} \quad (4-36)$$

取

$$\mathbf{P} = \int_0^\infty \mathbf{M}(t) dt \quad (4-37)$$

即可满足

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}$$

且

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^T &= \left( \int_0^\infty \mathbf{M}(t) dt \right)^T = \left( \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{Q} e^{\mathbf{A}t} dt \right)^T = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{Q}^T e^{\mathbf{A}t} dt \\ &= \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{Q} e^{\mathbf{A}t} dt = \int_0^\infty \mathbf{M}(t) dt = \mathbf{P} \end{aligned}$$

表明按式(4-37)选取的  $\mathbf{P}$  为实对称矩阵。为考察  $\mathbf{P}$  的正定性, 取任意  $n$  维非零常数向量  $\mathbf{x}_0$ , 考察由  $\mathbf{P}$  构成的二次型函数

$$\mathbf{x}_0^T \mathbf{P} \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0^T \left( \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{Q} e^{\mathbf{A}t} dt \right) \mathbf{x}_0 = \int_0^\infty (\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0)^T \mathbf{Q} (\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0) dt = \int_0^\infty \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} dt \quad (4-38)$$

式中,  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0$  为式(4-31)的非零解向量。又  $\mathbf{Q}$  为正定实对称矩阵, 故式(4-38)中的被积函数为正定二次型函数, 所以式(4-38)的积分大于零, 由此可知实对称矩阵  $\mathbf{P}$  正定。

综上所述, 若系统式(4-31)在  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  渐近稳定, 则任取一个正定实对称矩阵  $\mathbf{Q}$ , 必存在另一个正定实对称矩阵  $\mathbf{P}$ , 满足李亚普诺夫方程式(4-32)。必要性得证。

应用定理 4-6 分析线性定常连续系统的稳定性时应注意如下几点:

(1) 定理 4-6 所阐述的条件与系统矩阵  $\mathbf{A}$  的所有特征值均具有负实部的条件等价, 因此, 定理 4-6 给出的条件是充分必要条件。实际应用时, 常先选取一个正定的实对称矩阵  $\mathbf{Q}$ , 从李亚普诺夫方程式(4-32)求解出对应的实对称矩阵  $\mathbf{P}$ , 然后利用 Sylvester 准则确定矩阵  $\mathbf{P}$  的定号性, 进而判断系统的渐近稳定性。

(2) 尽管正定实对称矩阵  $\mathbf{Q}$  的形式可任意选取, 最终的判断结果不因所选择的正定实对称

矩阵  $\mathbf{Q}$  形式不同而不同,但为了方便求解李亚普诺夫方程,通常选取正定实对称矩阵  $\mathbf{Q}$  为单位矩阵  $\mathbf{I}$ ,这时实对称矩阵  $\mathbf{P}$  应按式(4-39)求解,即

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{I} \quad (4-39)$$

式中,  $\mathbf{I}$  为  $n$  阶单位矩阵。

(3) 有时为了简化求解实对称矩阵  $\mathbf{P}$  的运算,矩阵  $\mathbf{Q}$  也可取为半正定的。这时若由李亚普诺夫方程式(4-32)求解出的实对称矩阵  $\mathbf{P}$  是正定的,则李亚普诺夫函数  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$  是正定的,而  $V(\mathbf{x})$  沿任意状态轨迹对时间的导数  $\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T (-\mathbf{Q}) \mathbf{x} = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$  半负定,根据定理 4-3 可判断系统在李亚普诺夫意义下是稳定的。进一步,只要  $\dot{V}(\mathbf{x})$  在系统非零解运动轨线上不恒为零,根据定理 4-2,可判断系统是渐近稳定的。

**【例 4-8】** 设系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

其平衡状态为坐标原点,试判断这一状态的稳定性。

**解** 设可能的李亚普诺夫函数为

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$$

其中,  $\mathbf{P}$  为实对称矩阵,即  $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$ ,且有  $p_{12} = p_{21}$ ,又  $\mathbf{P}$  满足李亚普诺夫方程式(4-32)

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}$$

选取正定实对称矩阵  $\mathbf{Q}$  为单位矩阵  $\mathbf{I}$ ,代入上式,得

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

考虑到  $P_{12} = P_{21}$ ,则以上矩阵方程可展成如下联立方程组

$$\begin{cases} -2p_{12} = -1 \\ p_{11} - p_{12} - p_{22} = 0 \\ 2p_{12} - 2p_{22} = -1 \end{cases}$$

解出

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

则矩阵  $\mathbf{P}$  的各阶顺序主子式为

$$\Delta_1 = \frac{3}{2} > 0, \Delta_2 = \det \mathbf{P} = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{5}{4} > 0$$

可见,矩阵  $\mathbf{P}$  的各阶顺序主子式均大于零,由 Sylvester 准则,可确定矩阵  $\mathbf{P}$  是正定的。因此,系统在原点处的平衡状态是大范围内渐近稳定的。且系统的李亚普诺夫函数及其导数分别为

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2) > 0$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T(-\mathbf{Q})\mathbf{x} = \mathbf{x}^T(-\mathbf{I})\mathbf{x} = -(x_1^2 + x_2^2) < 0$$

在例 4-5 中,已利用李亚普诺夫第二法的有关定理,基于经验采用试探的方法构造李亚普诺夫函数分析了例 4-8 所给系统的稳定性;例 4-8 则根据定理 4-6 提供的判据分析系统的稳定性,所得结论与例 4-5 一致。事实上,定理 4-6 提供了线性定常连续系统构造李亚普诺夫函数的通用方法。

**【例 4-9】** 设系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -4k & 4k \\ 2k & -6k \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

其中,  $k \neq 0$ , 试用李亚普诺夫第二方法确定使系统成为渐近稳定系统的  $k$  值取值范围。

**解** 因  $\det \mathbf{A} \neq 0$ , 故原点是系统的唯一平衡状态, 系统的渐近稳定性与原点的渐近稳定性一致。

取  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ , 并令实对称矩阵  $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$ , 且有  $p_{12} = p_{21}$ 。代入式(4-32)得

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -8kp_{11} + 4kp_{12} & 4k(p_{11} - p_{12}) + 2k(p_{22} - 3p_{12}) \\ 4k(p_{11} - p_{12}) + 2k(p_{22} - 3p_{12}) & 8kp_{12} - 12kp_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

将上述矩阵方程展为联立方程组, 解得

$$\mathbf{P} = \frac{1}{40k} \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{40k} \bar{\mathbf{P}}$$

因为  $\bar{\mathbf{P}}$  正定, 故只要  $k > 0$ , 即可保证  $\mathbf{P}$  正定, 从而保证系统渐近稳定。

本例为了简化求解实对称矩阵  $\mathbf{P}$  的运算, 也可取  $\mathbf{Q}$  为半正定的实对称矩阵, 即取

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则  $\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T(-\mathbf{Q})\mathbf{x} = -x_2^2$  是半负定的。显然, 使  $\dot{V}(\mathbf{x}) = -x_2^2 \equiv 0$  的条件是  $x_2 \equiv 0$ , 但由系统状态方程推知, 此时  $x_1 \equiv 0$ , 这表明只有在状态空间原点才能使  $\dot{V}(\mathbf{x}) \equiv 0$ , 而沿系统的任一非零解运动轨线  $\dot{V}(\mathbf{x})$  均不恒为零。因此按上式选取  $\mathbf{Q}$  为半正定实对称矩阵是可行的。将所选取的半正定实对称矩阵  $\mathbf{Q}$  代入李亚普诺夫方程式(4-32), 并求解出对应的实对称矩阵  $\mathbf{P}$ , 由  $\mathbf{P}$  正定的充要条件, 同样可推出  $k > 0$  的要求, 但这样选取  $\mathbf{Q}$  阵可简化求解  $\mathbf{P}$  阵的计算。

## 2. 线性定常离散系统

**定理 4-7** 设线性定常离散系统自由运动的状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) \quad (4-40)$$

则系统在平衡状态  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  处渐近稳定的充要条件为: 对任意给定的正定实对称矩阵  $\mathbf{Q}$ , 存在另外一个正定的实对称矩阵  $\mathbf{P}$ , 满足式(4-41)所示离散的李亚普诺夫方程

$$\mathbf{G}^T \mathbf{P} \mathbf{G} - \mathbf{P} = -\mathbf{Q} \quad (4-41)$$

且

$$V[\mathbf{x}(k)] = \mathbf{x}^T(k) \mathbf{P} \mathbf{x}(k) \quad (4-42)$$

是系统的一个李亚普诺夫函数。

**证明** 这里只对充分性进行证明, 必要性的证明留给读者作为练习。

因为  $\mathbf{P}$ 、 $\mathbf{Q}$  均为正定实对称矩阵且满足矩阵方程式(4-41), 故取正定的二次型函数

$$V[\mathbf{x}(k)] = \mathbf{x}^T(k) \mathbf{P} \mathbf{x}(k)$$

为一个可能的李亚普诺夫函数。由于离散系统不存在对时间的导数, 故将连续系统中  $V(\mathbf{x})$  对时

间的导数  $\dot{V}(\mathbf{x})$  代之以李亚普诺夫函数的增量  $\Delta V[\mathbf{x}(k)] = V[\mathbf{x}(k+1)] - V[\mathbf{x}(k)]$ , 则有

$$\begin{aligned}\Delta V[\mathbf{x}(k)] &= V[\mathbf{x}(k+1)] - V[\mathbf{x}(k)] = \mathbf{x}^T(k+1)\mathbf{P}\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}^T(k)\mathbf{P}\mathbf{x}(k) \\ &= [\mathbf{G}\mathbf{x}(k)]^T\mathbf{P}[\mathbf{G}\mathbf{x}(k)] - \mathbf{x}^T(k)\mathbf{P}\mathbf{x}(k) \\ &= \mathbf{x}^T(k)\mathbf{G}^T\mathbf{P}\mathbf{G}\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^T(k)\mathbf{P}\mathbf{x}(k) \\ &= \mathbf{x}^T(k)[\mathbf{G}^T\mathbf{P}\mathbf{G} - \mathbf{P}]\mathbf{x}(k) \\ &= \mathbf{x}^T(k)(-\mathbf{Q})\mathbf{x}(k) = -\mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k)\end{aligned}$$

因为  $\mathbf{Q}$  正定, 则  $-\mathbf{Q}$  负定,  $\Delta V[\mathbf{x}(k)]$  负定, 故  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  是渐近稳定的平衡状态。

应该指出, 与线性定常连续系统类似, 若  $\Delta V[\mathbf{x}(k)] = -\mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k)$  沿任一解的序列不恒等于零, 则  $\mathbf{Q}$  亦可取成半正定矩阵。实际上, 应用定理 4-7 分析线性定常离散系统稳定性需要注意的事项与前述应用定理 4-6 分析线性定常连续系统稳定性应注意的几点是相似的, 不再赘述。

**【例 4-10】** 设线性定常离散系统的状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

试确定系统在平衡状态渐近稳定的条件。

**解 方法一** (应用特征值判据)

应用定理 4-5, 系统渐近稳定的充要条件是系统矩阵  $\mathbf{G}$  的所有特征值的模都小于 1, 即应满足

$$|\lambda_1| < 1 \text{ 和 } |\lambda_2| < 1$$

即只有当系统的所有极点都位于复数平面的单位圆以内时, 系统在平衡点处才是大范围渐近稳定的。

**方法二** (应用李亚普诺夫直接法)

选取  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ , 代入离散的李亚普诺夫方程式 (4-41), 得

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

令  $p_{12} = p_{21}$ , 代入上式化简, 得

$$\begin{bmatrix} p_{11}(1-\lambda_1^2) & p_{12}(1-\lambda_1\lambda_2) \\ p_{12}(1-\lambda_1\lambda_2) & p_{22}(1-\lambda_2^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

将以上矩阵方程展为联立方程组, 解得

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\lambda_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\lambda_2^2} \end{bmatrix}$$

由 Sylvester 准则, 为使  $\mathbf{P}$  正定, 则要求

$$|\lambda_1| < 1 \text{ 和 } |\lambda_2| < 1$$

## 4.6 线性时变系统李亚普诺夫函数的求法

### 4.6.1 线性时变连续系统

**定理 4-8** 设线性时变连续系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \quad (4-43)$$

式中,  $\mathbf{x}$  为  $n$  维状态向量;  $\mathbf{A}(t)$  为  $n \times n$  维系统矩阵, 且为时间的函数。则系统在平衡点  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  处大范围渐近稳定的充要条件为: 对于任意给定的连续对称正定矩阵  $\mathbf{Q}(t)$ , 存在一个连续对称正定矩阵  $\mathbf{P}(t)$ , 满足

$$\dot{\mathbf{P}} = -\mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) - \mathbf{Q}(t) \quad (4-44)$$

且系统的李亚普诺夫函数是

$$V(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}^T \mathbf{P}(t) \mathbf{x} \quad (4-45)$$

定理 4-8 给出了构造线性时变连续系统李亚普诺夫函数的通用方法, 其中, 式(4-44)是里卡提(Riccati)矩阵微分方程的特殊情况。线性时变连续系统渐近稳定的判别步骤与线性定常连续系统相似。

## 4.6.2 线性时变离散系统

**定理 4-9** 设线性时变离散系统的状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}(k+1, k)\mathbf{x}(k) \quad (4-46)$$

则系统在平衡点  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  处大范围渐近稳定的充要条件是: 对于任意给定的正定实对称矩阵  $\mathbf{Q}(k)$ , 存在一个正定实对称矩阵  $\mathbf{P}(k+1)$ , 满足

$$\mathbf{G}^T(k+1, k)\mathbf{P}(k+1)\mathbf{G}(k+1, k) - \mathbf{P}(k) = -\mathbf{Q}(k) \quad (4-47)$$

且标量函数

$$V[\mathbf{x}(k), k] = \mathbf{x}^T(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{x}(k) \quad (4-48)$$

是系统的一个李亚普诺夫函数。

定理 4-9 给出了构造线性时变离散系统李亚普诺夫函数的通用方法。线性时变离散系统渐近稳定的判别步骤与线性连续系统相似。

## 4.7 非线性系统李亚普诺夫稳定性分析

与线性系统相比较, 因为非线性特性的多样性和复杂性, 非线性系统的稳定性分析要复杂得多。非线性系统的平衡状态可能不止一个, 而且可能有的平衡状态是稳定的, 有的是不稳定的, 非线性系统的稳定性具有局部性质。例如, 在非线性系统中, 在大范围内不是渐近稳定的平衡状态可能是局部渐近稳定的; 而局部不稳定的平衡状态并不能说明系统就是不稳定的。李亚普诺夫第二法的稳定性判据(定理 4-1~定理 4-3)仅给出了充分条件, 应用中所遇到的困难主要是没有一般的通用方法构造出适合非线性系统的李亚普诺夫函数。对于简单情况, 可参考系统的能量函数来选取李亚普诺夫函数, 而对复杂情况往往因找不到满足定理条件的李亚普诺夫函数, 而不能判定系统平衡状态的稳定性。虽然对非线性系统现在已有一些构造李亚普诺夫函数的有效方法, 但这些方法只分别适合一类特定的情况, 仍不具有通用性。

本节分别介绍李亚普诺夫第一法(间接法)和李亚普诺夫第二法(直接法)在非线性系统稳定性分析中的应用。

### 4.7.1 李亚普诺夫第一法分析非线性系统的稳定性

李亚普诺夫第一法(间接法)的基本思想是将非线性系统在平衡点附近线性化, 然后用线性系统稳定性的方法研究平衡点附近小范围内近似线性系统的稳定性。



设  $n$  维非线性系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (4-49)$$

其中,  $\mathbf{x}$  为  $n$  维状态向量;  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  为  $n$  维函数向量, 且对  $\mathbf{x}$  有连续的偏导数。设  $\mathbf{x}_e$  为系统的平衡状态, 为分析系统式(4-49)在平衡状态  $\mathbf{x}_e$  附近的稳定性, 可将非线性向量  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  在平衡状态  $\mathbf{x}_e$  附近作向量泰勒级数展开, 即

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_e) + \mathbf{R}(\mathbf{x}) \quad (4-50)$$

式中,  $\mathbf{R}(\mathbf{x})$  为级数展开式中大于和等于 2 阶的项, 而

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (4-51)$$

称为雅可比(Jacobian)矩阵。

若令  $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_e$ , 并取式(4-50)的一次近似式, 则得非线性系统式(4-49)的一次近似线性化数学模型

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} \quad (4-52)$$

式中,  $\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e}$  为  $n \times n$  维常数阵。 $\mathbf{z} = \mathbf{0}$  为式(4-52)的平衡状态, 对应于  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_e$ 。

对非线性系统式(4-49)和在平衡状态  $\mathbf{x}_e$  附近一次近似线性模型式(4-52), 李亚普诺夫给出如下结论:

(1) 若式(4-52)中系统矩阵  $\mathbf{A}$  的所有特征值都具有负实部, 则原非线性系统式(4-49)的平衡状态  $\mathbf{x}_e$  是渐近稳定的;

(2) 若式(4-52)中系统矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值, 至少有一个具有正实部, 则原非线性系统式(4-49)的平衡状态  $\mathbf{x}_e$  是不稳定的;

(3) 当式(4-52)中系统矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值都不具有正的实部, 但至少有一个特征值的实部为零时, 原非线性系统式(4-49)不能用一次近似线性模型式(4-52)判断其稳定性, 原非线性系统式(4-49)的平衡状态  $\mathbf{x}_e$  稳定与否取决于泰勒级数展开式中的高阶项  $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ 。对于这种特殊情况, 采用李亚普诺夫第一法不能对非线性系统的稳定性进行分析, 可采用李亚普诺夫第二法。

李亚普诺夫第一法奠定了线性化研究方法的理论基础。但对于含有不光滑非线性函数的系统, 由于不可能在平衡状态附近进行微偏线性化, 李亚普诺夫第一法则不适用; 而且李亚普诺夫第一法只适于研究平衡点附近小范围的稳定性。

#### 4.7.2 李亚普诺夫第二法在非线性系统稳定性分析中的应用

李亚普诺夫第二法是分析系统平衡状态稳定性的强有力工具, 对任何复杂系统都适用, 而对于运动方程求解困难的高阶系统、非线性系统及时变系统的稳定性分析, 则更能显示出优越性。其不仅适于研究平衡状态附近的小范围的稳定性, 也适用于平衡状态附近较大的范围。下面介绍基于李亚普诺夫第二法(直接法)的两种特殊方法, 即判断渐近稳定性充分条件的克拉索夫斯基方法和构造李亚普诺夫函数的变量梯度法。

## 1. 克拉索夫斯基方法

针对某些非线性系统,克拉索夫斯基提出一个可能的李亚普诺夫函数,其并非由状态向量  $\mathbf{x}$  构成,而是用其导数  $\dot{\mathbf{x}}$  的范数来构成。实际上,这一方法是前述构造线性系统李亚普诺夫函数方法的推广。

**定理 4-10**(克拉索夫斯基定理) 设不受外部作用的非线性定常系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (4-53)$$

式中,  $\mathbf{x}$  为  $n$  维状态向量;  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  为  $n$  维非线性向量函数。且设状态空间原点为系统的平衡状态,即

$$\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

且  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  对  $x_i (i=1, 2, \dots, n)$  可微,系统的雅可比(Jacobian)矩阵为

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (4-54)$$

若下列矩阵

$$\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^T(\mathbf{x}) + \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

是负定的,则该系统在平衡状态  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  时是渐近稳定的。且该系统的李亚普诺夫函数为

$$V(\mathbf{x}) = \|\dot{\mathbf{x}}\|^2 = \dot{\mathbf{x}}^T \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (4-55)$$

而且若当  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$  时,还有  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ ,那么系统的平衡状态  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  是大范围渐近稳定的。

请读者注意,克拉索夫斯基定理对于非线性系统式(4-53)仅给出了其在平衡状态  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  渐近稳定的充分条件。如果矩阵  $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^T(\mathbf{x}) + \mathbf{F}(\mathbf{x})$  不是负定的,则不能得出关于给定非线性系统平衡状态稳定性的任何结论。

**【例 4-11】** 用克拉索夫斯基方法证明以下系统的平衡状态  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  是大范围渐近稳定的。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_2^3 \end{cases}$$

**解** 由题给条件,  $f_1(\mathbf{x}) = -5x_1 + x_2$ ,  $f_2(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 - x_2^3$ ,则系统的雅可比矩阵为

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -1-3x_2^2 \end{bmatrix}$$

则

$$\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^T(\mathbf{x}) + \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -1-3x_2^2 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -1-3x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 2 \\ 2 & -2-6x_2^2 \end{bmatrix}$$

则矩阵  $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^T(\mathbf{x}) + \mathbf{F}(\mathbf{x})$  的各阶顺序主子式为

$$\Delta_1 = -10 < 0, \Delta_2 = \det \hat{\mathbf{F}} = \begin{vmatrix} -10 & 2 \\ 2 & -2-6x_2^2 \end{vmatrix} = 60x_2^2 + 16 > 0$$

由 Sylvester 准则, 可判定  $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^T(\mathbf{x}) + \mathbf{F}(\mathbf{x})$  是负定的。而且当  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$  时, 还有

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= \mathbf{f}^T(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -5x_1 + x_2 & x_1 - x_2 - x_2^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 - x_2^3 \end{bmatrix} = (-5x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2 - x_2^3)^2 \rightarrow \infty \end{aligned}$$

则根据克拉索夫斯基定理, 可确定系统的平衡状态  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  是大范围渐近稳定的。

## 2. 变量梯度法

变量梯度法由舒茨(Schultz)和基布逊(Gibson)在 1962 年提出, 其是构造非线性系统李亚普诺夫函数比较实用的方法。

设非线性系统为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (4-56)$$

式中,  $\mathbf{x}$  是  $n$  维状态向量;  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  是  $n$  维向量函数, 它的元素是  $x_1, x_2, \dots, x_n, t$  的非线性函数。假设状态空间原点为平衡状态。先假设找到了判断其渐近稳定的李亚普诺夫函数为  $V(\mathbf{x})$ , 其为状态  $\mathbf{x}$  的显函数, 而不是时间  $t$  的显函数。则  $V(\mathbf{x})$  的梯度

$$\nabla V(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (4-57)$$

存在且唯一。则  $V(\mathbf{x})$  对时间的导数为

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \dot{x}_n = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = [\nabla V(\mathbf{x})]^T \dot{\mathbf{x}} \quad (4-58)$$

舒茨和基布逊提出, 先把  $V(\mathbf{x})$  的梯度  $\nabla V(\mathbf{x})$  假设为某种形式, 例如一个带待定系数的  $n$  维列向量, 即

$$\nabla V(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (4-59)$$

然后根据  $\dot{V}(\mathbf{x})$  为负定或至少为半负定等约束条件确定待定系数, 并由此求出符合李亚普诺夫定理要求的  $V(\mathbf{x})$  和  $\dot{V}(\mathbf{x})$ 。由式(4-58)可知,  $V(\mathbf{x})$  可由其梯度  $\nabla V(\mathbf{x})$  做线积分求, 即

$$V(\mathbf{x}) = \int_0^t \dot{V}(\mathbf{x}) dt = \int_0^t [\nabla V(\mathbf{x})]^T \dot{\mathbf{x}} dt = \int_0^x [\nabla V(\mathbf{x})]^T d\mathbf{x} \quad (4-60)$$

这里的积分上限  $\mathbf{x}$  是整个状态空间中的任意一点  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 。

由场论知识,若向量  $\nabla V(\mathbf{x})$  的  $n$  维旋度  $\text{rot}[\nabla V(\mathbf{x})]$  等于零,则式(4-60)的线积分与积分路径无关。而  $\text{rot}[\nabla V(\mathbf{x})]=\mathbf{0}$  的充要条件是向量  $\nabla V(\mathbf{x})$  的雅可比矩阵

$$\frac{\partial[\nabla V(\mathbf{x})]}{\partial \mathbf{x}^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial V}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial V}{\partial x_1} \right) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} \left( \frac{\partial V}{\partial x_1} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial V}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial V}{\partial x_2} \right) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} \left( \frac{\partial V}{\partial x_2} \right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial V}{\partial x_n} \right) & \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial V}{\partial x_n} \right) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} \left( \frac{\partial V}{\partial x_n} \right) \end{bmatrix} \quad (4-61)$$

是对称矩阵,即满足如下  $n(n-1)/2$  个旋度方程

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial V}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial V}{\partial x_j} \right) \quad (i, j=1, 2, \dots, n) \quad (4-62)$$

当式(4-62)所示的条件满足时,式(4-60)所示求  $V(\mathbf{x})$  的线积分与积分路径无关,这时可选择一条使线积分计算最简便的路径,即依序沿各坐标轴  $x_i (i=1, 2, \dots, n)$  方向逐点分段积分,即

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) = & \int_0^{x_1} \left( \frac{\partial V}{\partial x_1} \right) dx_1 + \int_0^{x_2} \left( \frac{\partial V}{\partial x_2} \right) dx_2 + \dots + \\ & \int_0^{x_n} \left( \frac{\partial V}{\partial x_n} \right) dx_n \end{aligned} \quad (4-63)$$

综上所述,按变量梯度法构造李亚普诺夫函数  $V(\mathbf{x})$  的步骤为:

(1) 将李亚普诺夫函数  $V(\mathbf{x})$  的梯度  $\nabla V(\mathbf{x})$  设为如式(4-59)所示的带待定系数的  $n$  维列向量的形式,其中  $a_{ij} (i, j=1, 2, \dots, n)$  为待定系数,其可为常数,也可为  $t$  的函数或(和)状态变量的函数。应用中,为了简化计算,通常将  $a_{mi}$  选择为常数或  $t$  的函数,一些待定系数  $a_{ij}$  也可选择为零。

(2) 据式(4-58)由  $\nabla V(\mathbf{x})$  写出  $\dot{V}(\mathbf{x})$ 。由  $\dot{V}(\mathbf{x})$  是负定的或至少是半负定的约束条件,确定一部分待定系数  $a_{ij}$ 。

(3) 由  $\nabla V(\mathbf{x})$  的  $n$  维旋度等于零的约束条件,即  $n(n-1)/2$  个旋度方程式(4-62)确定其余待定参数  $a_{ij}$ 。

(4) 根据第(3)步所得结果可能改变  $\dot{V}(\mathbf{x})$ ,故应按照所得结果重新校核  $\dot{V}(\mathbf{x})$  的定号性质。

(5) 按式(4-63)由  $\nabla V(\mathbf{x})$  的线积分求出  $V(\mathbf{x})$ ,并验证其正定性。

(6) 确定渐近稳定的范围。

应该指出,若采用上述变量梯度法求不出合适的李亚普诺夫函数,并不意味着平衡状态是不稳定的,这时不能得出关于给定非线性系统平衡状态稳定性的任何结论。

另外,由于非线性系统的稳定性具有局部的性质,因此,如果非线性系统的平衡状态是渐近稳定的,则希望找出在平衡点周围最大邻域内满足稳定条件的李亚普诺夫函数,以确定平衡状态渐近稳定的最大范围。

【例 4-12】 设没有外部作用的非线性系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$$

应用变量梯度法分析系统平衡状态  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  的稳定性。

解 设李亚普诺夫函数  $V(\mathbf{x})$  的单值梯度为

$$\nabla V(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix}$$

按式(4-58)计算  $\dot{V}(\mathbf{x})$  得

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= [\nabla V(\mathbf{x})]^T \dot{\mathbf{x}} = [a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2] \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \\ &= [a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2] \begin{bmatrix} -x_1 + 2x_1^2 x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix} \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)(-x_1 + 2x_1^2 x_2) + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)(-x_2) \\ &= -a_{11}x_1^2 - a_{12}x_1 x_2 + 2a_{11}x_1^3 x_2 + 2a_{12}x_1^2 x_2^2 - a_{21}x_1 x_2 - a_{22}x_2^2 \end{aligned}$$

待定系数的选择是有一定试探性的。对本例,试取  $a_{11}=1, a_{22}=2, a_{12}=a_{21}=0$ , 则

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -x_1^2(1-2x_1x_2) - 2x_2^2$$

显然,要使  $\dot{V}(\mathbf{x})$  是负定的,  $x_1$  和  $x_2$  应满足如下约束条件

$$1 - 2x_1x_2 > 0$$

在  $a_{12}$  和  $a_{21}$  均取常数时,由约束条件式(4-62)得旋度方程

$$\frac{\partial(a_{11}x_1 + a_{12}x_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial(a_{21}x_1 + a_{22}x_2)}{\partial x_1}$$

即

$$a_{12} = a_{21}$$

因此,以上参数选择( $a_{12}=a_{21}=0$ )满足旋度方程条件,则  $\text{rot}[\nabla V(\mathbf{x})] = \mathbf{0}$ , 即式(4-60)所示求  $V(\mathbf{x})$  的线积分与积分路径无关,故可按式(4-63)计算  $V(\mathbf{x})$ , 即

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= \int_0^{\mathbf{x}} [\nabla V(\mathbf{x})]^T d\mathbf{x} = \int_0^{\mathbf{x}} \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{bmatrix} \\ &= \int_0^{x_1(x_2=0)} x_1 dx_1 + \int_0^{x_2(x_1=x_1)} 2x_2 dx_2 = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 \end{aligned}$$

显然,所求得李亚普诺夫函数  $V(\mathbf{x})$  是正定的。而在  $1 - 2x_1x_2 > 0$ , 即  $2x_1x_2 < 1$  的范围内,  $\dot{V}(\mathbf{x})$  是负定的。因此,在  $2x_1x_2 < 1$  的区域内,系统的平衡状态  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  是渐近稳定的。

应当指出,由于待定系数  $a_{ij}$  的选择并非唯一,且李亚普诺夫稳定性基本定理给出的条件只是充分条件,故选择不同的待定系数  $a_{ij}$  所构成的李亚普诺夫函数  $V(\mathbf{x})$  不同,相应所确定的渐近稳定区域也有可能不同。

## 4.8 李亚普诺夫直接法应用举例

李亚普诺夫直接法在控制理论中的应用不仅限于稳定性分析,而且可用来研究线性系统 and 非线性系统自由响应的快速性、确定线性系统的校正方案及求解基于二次型性能指标的系统参

数最优问题。作为应用举例,本节仅简要介绍李亚普诺夫直接法在线性定常系统结构稳定设计中的应用。

设不稳定的单输入线性定常系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (4-64)$$

选取正定二次型函数

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (4-65)$$

为李亚普诺夫函数,式中,  $\mathbf{P}$  为  $n$  阶正定的实对称方阵。则  $V(\mathbf{x})$  沿任意状态轨迹对时间的导数

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T + u \mathbf{B}^T) \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} u) \\ &= \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} + (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{B}) u \end{aligned} \quad (4-66)$$

考虑到  $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}$ , 则对标量  $\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$  而言, 有  $\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x})^T = \mathbf{x}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B} = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{B}$ , 代入式(4-66), 得

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} + 2 \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{B} u$$

若所选  $\mathbf{P}$  使  $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}$  负定, 同时选择输入

$$u = -k \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (4-67)$$

其中常数  $k > 0$ , 使

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} - 2k \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T [\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - 2k \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{P}] \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \end{aligned} \quad (4-68)$$

负定, 则原系统采用式(4-67)所示的状态反馈控制后, 闭环系统成为大范围渐近稳定系统。

**【例 4-13】** 设待校正系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

问采用什么样的控制结构使其成为渐近稳定系统?

**解** 原系统的特征值为  $\lambda_{1,2} = \pm j$ , 可见, 原系统不是渐近稳定, 只是李亚普诺夫意义下稳定。

取  $\mathbf{P} = \mathbf{I}$ , 即选李亚普诺夫函数为

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2$$

则  $V(\mathbf{x})$  沿任意状态轨迹对时间的导数

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 2x_1 \dot{x}_1 + 2x_2 \dot{x}_2 = 2x_1 x_2 + 2x_2 (-x_1 + u) = 2x_2 u$$

若取  $u = -k x_2, k > 0$ , 则

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -2k x_2^2 \leq 0$$

$\dot{V}(\mathbf{x})$  是半负定的, 且  $\dot{V}(\mathbf{x})$  在非零解状态运动轨线上不恒等于零, 故系统校正为渐近稳定系统。

可见, 原系统采用状态反馈控制

$$u = -k x_2, k > 0$$

校正后得到的闭环系统则成为渐近稳定系统。若取  $k = 2$ , 则控制输入  $u = -2x_2$ , 状态反馈闭环系统的系统矩阵

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

的特征值为  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ , 闭环系统确实为大范围渐近稳定系统。

由于  $\dot{x}_1 = x_2$ , 故本例采用的状态反馈控制  $u = -kx_2$  实质上就是经典控制理论中的速度负反馈补偿措施。

## 4.9 MATLAB 在系统稳定性分析中的应用

### 4.9.1 李亚普诺夫第一法

MATLAB 控制系统工具箱提供了 poly、roots 和 eig 函数, 通过调用它们, 即可得出线性定常系统的特征值, 进而得出系统稳定性的结论。

**【例 4-14】** 设线性定常系统状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -8 & -16 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

试用 MATLAB 判断系统的稳定性。

**解** MATLAB Program 4\_1 为求系统特征根程序:

```
%MATLAB Program 4_1
A=[-8 -16 -6;1 0 0;0 1 0];
P=poly(A);
roots(P)
```

MATLAB Program 4\_1 运行结果为

```
Ans=
-5.0861
-2.4280
-0.4859
```

可见, 特征方程的全部特征根均具有负实部, 故系统是稳定的。

事实上, 本题也可调用 eig() 函数直接求取矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值, 即 MATLAB Program 4\_2 程序:

```
%MATLAB Program 4_2
A=[-8 -16 -6;1 0 0;0 1 0];
eig(A)
```

MATLAB Program 4\_2 运行结果与 MATLAB Program 4\_1 一致。

### 4.9.2 李亚普诺夫第二法

MATLAB 控制系统工具箱中提供的矩阵方程求解函数 lyap 及 dlyap 可分别用于基于李亚普诺夫第二法的线性定常系统稳定性分析。其中, lyap 用于求解线性定常连续系统的李亚普诺夫方程, dlyap 则用于求解线性定常离散系统的李亚普诺夫方程。

$\mathbf{P} = \text{lyap}(\mathbf{A}, \mathbf{Q})$  可求解矩阵方程  $\mathbf{AP} + \mathbf{PA}^T = -\mathbf{Q}$ ;

$\mathbf{P} = \text{dlyap}(\mathbf{A}, \mathbf{Q})$  可求解矩阵方程  $\mathbf{APA}^T - \mathbf{P} = -\mathbf{Q}$ 。

## 小 结

外部稳定性(BIBO 稳定性)仅从外部定性地表征线性系统的稳定性,有一定局限性。内部稳定性揭示系统零输入时内部状态自由运动的稳定性,即为李亚普诺夫意义稳定性,能更全面、深刻地揭示系统的稳定性。李亚普诺夫关于稳定性的研究均针对平衡状态而言,本章围绕李亚普诺夫稳定性理论,主要介绍了以下几个重要内容。

(1) 李亚普诺夫稳定性的基本概念及基本定理。平衡状态稳定性的 4 个定义(即李亚普诺夫意义下稳定、渐近稳定、大范围渐近稳定、不稳定)、分析稳定性的方法(即李亚普诺夫第一法和李亚普诺夫第二法)及判别稳定性的基本定理。

李亚普诺夫第一法(间接法)利用状态方程的解的特性来判断系统稳定性。在分析线性定常系统稳定性时,可按经典控制理论的思路,直接由系统矩阵的特征值判断系统的稳定性,定理 4-4 为线性定常连续系统稳定性的特征值判据,定理 4-5 则为线性定常离散系统稳定性的特征值判据;对非线性系统,李亚普诺夫第一法则采用微偏线性化的方法处理,即通过分析非线性系统平衡状态附近一次近似线性模型来判断稳定性。

李亚普诺夫第二法(直接法)无须求解状态方程而借助于象征广义能量的李亚普诺夫函数  $V(\mathbf{x}, t)$  及其对时间的导数  $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$  的符号特征,直接判断平衡状态的稳定性(定理 4-1~定理 4-3),其提供了判断所有系统稳定性的通用方法,对于运动方程求解困难的高阶系统、非线性系统及时变系统的稳定性分析具有优越性。其不仅适用于研究平衡状态附近的小范围的稳定性,也适用于平衡状态附近较大的范围。应用李亚普诺夫第二法的关键在于构造一个满足判据条件的李亚普诺夫函数  $V(\mathbf{x}, t)$ ,而  $V(\mathbf{x}, t)$  具有这样一些突出的性质: $V(\mathbf{x}, t)$  是一个满足稳定性判据条件的正定标量函数,且对  $\mathbf{x}$  具有连续一阶偏导数;对给定系统,  $V(\mathbf{x}, t)$  不是唯一的。

定理 4-1~定理 4-3 给出的只是充分条件。若找不到一个满足稳定性判据条件的李亚普诺夫函数,则不能判定系统平衡状态的稳定性。

(2) 线性系统李亚普诺夫函数的求法。线性定常连续系统  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  的李亚普诺夫函数  $V(\mathbf{x})$  可取为二次型函数,即  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ ,且可通过求解李亚普诺夫方程  $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}$  判断平衡状态  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  处的渐近稳定性(定理 4-6)。定理 4-6 给出的是充分必要条件。

线性定常离散系统  $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k)$  的李亚普诺夫函数  $V[\mathbf{x}(k)]$  也可取为二次型函数,即  $V[\mathbf{x}(k)] = \mathbf{x}^T(k) \mathbf{P} \mathbf{x}(k)$ ,且可通过求解离散的李亚普诺夫方程  $\mathbf{G}^T \mathbf{P} \mathbf{G} - \mathbf{P} = -\mathbf{Q}$  判断平衡状态  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  处的渐近稳定性(定理 4-7)。定理 4-7 给出的也是充分必要条件。

(3) 李亚普诺夫第二法在非线性系统稳定性分析中的应用。应用李亚普诺夫第二法分析非线性系统稳定性所遇到的主要障碍是难以找到一个合适的李亚普诺夫函数,因为对一般非线性系统尚未找到构造李亚普诺夫函数的通用方法。虽然已有一些构造非线性系统李亚普诺夫函数的有效方法,但这些方法只分别适合一类特定的情况,仍不具有通用性。

本章介绍了基于李亚普诺夫第二法(直接法)的两种特殊方法,即判断渐近稳定性充分条件的克拉索夫斯基方法和构造李亚普诺夫函数的变量梯度法。

(4) 李亚普诺夫直接法应用举例及 MATLAB 在系统稳定性分析中的应用。

## 思考题与习题 4

4-1 什么是系统的 BIBO 稳定性? 什么是系统的内部稳定性? 两者有什么关系?



4-2 什么是系统的平衡状态? 什么是李亚普诺夫关于稳定性的一般定义?

4-3 李亚普诺夫函数具有什么性质?

4-4 试判断下列二次型函数的定号性。

(1)  $q(\mathbf{x}) = -x_1^2 - 10x_2^2 - 4x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_2x_3$

(2)  $q(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

(3)  $q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 8x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 - 2x_1x_3$

4-5 给定一个 SISO 线性定常连续系统为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{cases}$$

试判断: (1) 系统是否为 BIBO 稳定; (2) 系统是否为渐近稳定。

4-6 试用李亚普诺夫第二法分析下列线性系统的稳定性。

(1)  $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$     (2)  $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}$     (3)  $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

4-7 设线性定常离散系统的状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

试确定平衡状态  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  的稳定性。

4-8 设线性定常离散系统的状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k), a > 0$$

试用两种不同方法求平衡状态  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  渐近稳定所要求的  $a$  取值范围。

4-9 试用李亚普诺夫第二法确定使图 4-6 所示系统渐近稳定的  $K$  值范围, 并将所得答案与用劳斯稳定判据所得使系统稳定的  $K$  值进行比较。

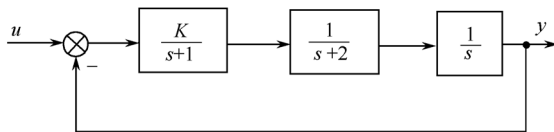


图 4-6 系统结构图

4-10 设非线性系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2a(1 - x_1^2)x_2 \end{cases}$$

式中,  $a$  为常数。试确定系统的平衡点, 并应用李亚普诺夫第一法讨论平衡点的稳定性。

4-11 试用克拉索夫斯基法判断下列系统平衡状态  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  的稳定性。

$$(1) \begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_2^3 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = 2x_2 - 2x_2^3 \end{cases}$$

4-12 试用李亚普诺夫第二法确定下列系统原点的稳定性。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

4-13 试用变量梯度法构造下列非线性系统的李亚普诺夫函数,并确定系统平衡状态  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  渐近稳定的范围。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$$

4-14 试用变量梯度法确定下列线性时变系统原点的稳定性。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{t+1}x_1 - 10x_2, t \geq 0 \end{cases}$$

4-15 设非线性系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + 2x_2^4 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$$

试确定原点的稳定性。

- (1) 采用李亚普诺夫第一方法;
- (2) 采用克拉索夫斯基方法;
- (3) 采用变量梯度法;
- (4) 取  $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$ ;
- (5) 比较以上 4 种方法的结果。

## 上机实验题 4

4-1 设线性系统状态方程分别为

$$(1) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (2) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

试用 MATLAB 工具,判断系统平衡状态的稳定性。

4-2 设线性定常系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -5.7208 & 7.7362 & -3.0010 & 20.000 \\ -0.7203 & -0.7270 & 0.4378 & 4.2001 \\ -0.0492 & -1.1425 & 0.6429 & 1.7928 \\ -1.3766 & -1.1387 & 1.0971 & 7.3219 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.7 \\ 0.1 \\ 0.3 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \quad 0 \quad 9 \quad -3] \mathbf{x} \end{cases}$$

试用 MATLAB 工具,判断系统在平衡状态  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  的稳定性。

4-3 设线性定常离散系统的状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -3 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

试用 MATLAB 工具,判断系统在平衡状态  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  的稳定性。

## 第5章 状态反馈与状态观测器

### 5.1 引言

本书第2~4章讲述了基于描述控制系统运动的数学模型(状态空间表达式)如何分析系统运动的性质和特征(动态响应、能控性、能观测性、稳定性)及其与系统结构、参数和输入控制信号的关系,这属于控制理论研究的两大问题之一,即控制系统分析的内容。控制理论研究的另一问题则是控制系统综合,其主要任务是根据被控对象及给定的技术指标要求设计自动控制系统,使其运动具有预期的性质和特征。众所周知,反馈是自动控制的核心概念之一,反馈控制是控制系统中一种重要的并被广泛应用的控制方式。经典控制理论基于传递函数描述系统运动,常采用带有串联校正装置、并联校正(局部反馈校正)装置的输出反馈控制方式,系统综合的方法为频域法(频率响应法、根轨迹法),综合的实质为闭环系统极点配置。

现代控制理论基于状态空间模型描述系统运动,采用线性状态反馈控制律的状态空间综合法,其不仅可实现闭环系统极点配置及系统解耦,而且可构成线性最优调节器。最优综合将在下一章讨论。本章重点讲述对一个性能不好甚至不稳定的被控系统,如何设计系统的状态反馈控制律,使闭环系统稳定且具有优良的动态响应。

状态反馈包含系统全部状态变量信息,是较输出反馈更全面的反馈,这本是状态空间综合法的优点,但并非所有被控系统的全部状态变量都可直接测量,这就提出了状态重构问题,即能否通过可测量的输出及输入重新构造在一定指标下与系统真实状态等价的状态估值?1964年,Luenberger提出的状态观测器理论有效解决了这一问题。状态反馈与状态观测器设计是状态空间综合法的主要内容,故如何设计状态观测器,重构出所需状态估值也是本章重点讲述的内容之一。

对采用状态反馈实现解耦控制及MATLAB在闭环极点配置、状态观测器设计中的应用,本章也作了介绍。本章最后给出了线性控制系统理论的工程应用举例。

### 5.2 状态反馈与输出反馈

因为反馈控制具有抑制任何内、外扰动对被控量产生影响的能力,而且适当地采用反馈还可改善系统的稳定性和输出的动态响应,故由被控系统和反馈控制律构成闭环系统是自动控制系统最基本的结构,其根据反馈信号是取自被控系统的状态还是取自被控系统的输出分为状态反馈、输出反馈两种基本形式。

#### 5.2.1 状态反馈

图5-1所示为多输入多输出系统的状态反馈结构图。设图5-1虚线框内所示多输入多输出线性定常被控系统 $\Sigma(A, B, C, D)$ 的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \end{cases} \quad (5-1)$$

式中, $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}$ 分别为 $n$ 维、 $r$ 维和 $m$ 维列向量; $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ 分别为 $n \times n, n \times r, m \times n, m \times r$ 维实数矩阵。

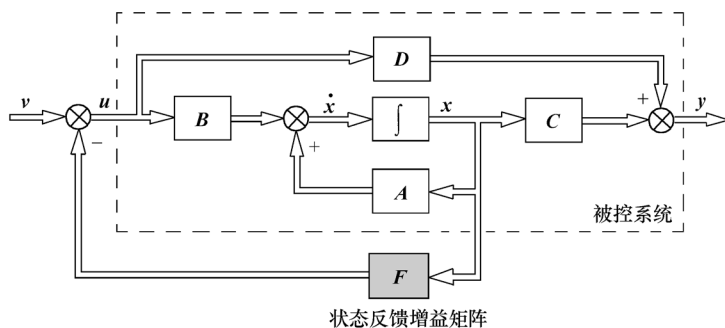


图 5-1 多输入多输出系统的状态反馈结构

对多数实际被控系统,由于输入与输出之间总存在惯性,所以传递矩阵  $D=0$ 。若被控系统  $D=0$ ,可简记为  $\Sigma(A, B, C)$ ,对应的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (5-2)$$

图 5-1 采用线性直接状态反馈(简称状态反馈)构成闭环系统以改善原被控系统的性能,即将被控系统的每个状态变量乘以相应的反馈增益值,然后反馈到输入端,与参考输入  $v$  一起组成状态反馈控制律,作为被控系统的控制量  $u$ 。由图 5-1 显见,状态反馈控制律(即被控系统的控制量  $u$ )为状态变量的线性函数

$$u = v - Fx \quad (5-3)$$

式中,  $v$  为  $r$  维参考输入列向量;  $F$  为  $r \times n$  维状态反馈增益矩阵,且其为实数阵。

将式(5-3)代入式(5-1),可得采用状态反馈构成的闭环系统状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BF)x + Bv \\ y = (C - DF)x + Dv \end{cases} \quad (5-4)$$

若  $D=0$ ,则式(5-4)可简化为式(5-5),即

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BF)x + Bv \\ y = Cx \end{cases} \quad (5-5)$$

式(5-5)可简记为  $\Sigma_F(A - BF, B, C)$ ,其对应的传递函数矩阵为

$$W_F(s) = C(sI - (A - BF))^{-1}B \quad (5-6)$$

注意到式(5-1)和式(5-4)维数及状态空间相同,但原开环系统(被控系统)的系统矩阵为  $A$ ,引入式(5-3)状态反馈控制律的闭环系统,其系统矩阵变为  $A - BF$ ,因此,在被控系统状态完全能控的条件下,可通过适当选取反馈增益矩阵  $F$  自由改变其闭环系统特征值,以使系统达到期望的性能。而且在  $D=0$  条件下,引入状态反馈不改变输出方程。

### 5.2.2 输出反馈

输出反馈最常见的形式是用被控系统输出向量的线性反馈构成闭环系统,如图 5-2 所示,将被控系统的每个输出变量乘以相应的反馈增益值,然后反馈到输入端与参考输入  $v$  一起组成式(5-7)所示的线性非动态输出反馈(简称输出反馈)控制律,作为被控系统的控制量  $u$ ,即

$$u = v - Hy \quad (5-7)$$

式中,  $v$  为  $r$  维参考输入列向量;  $y$  为  $m$  维输出列向量;  $H$  为  $r \times m$  维输出反馈实数增益矩阵。

若  $D=0$ ,将式(5-7)代入式(5-2)得被控系统  $\Sigma(A, B, C)$  引入输出反馈构成的闭环系统状

态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BHC)x + Bv \\ y = Cx \end{cases} \quad (5-8)$$

式(5-8)可简记为  $\Sigma_H(A - BHC, B, C)$ , 其对应的传递函数矩阵为

$$W_H(s) = C(sI - (A - BHC))^{-1}B \quad (5-9)$$

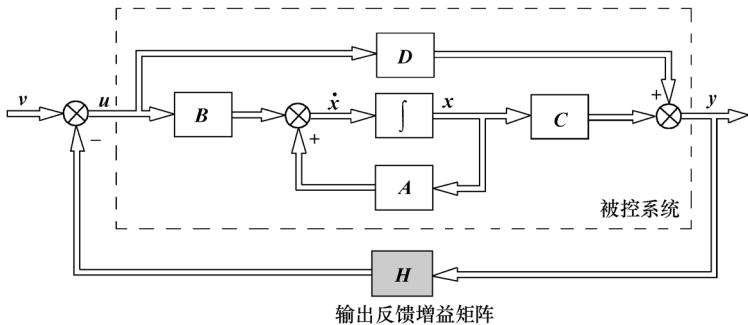


图 5-2 多输入多输出系统的输出反馈至参考输入结构

引入输出反馈也未增加系统维数,且若  $D=0$ ,输出反馈系统的输入矩阵、输出矩阵均与开环系统相同,但系统矩阵变为  $A - BHC$ ,因此,可通过适当选取输出反馈增益矩阵  $H$  改变闭环系统特征值,从而改善系统的性能。

在被控系统  $D=0$  时,比较两种基本反馈控制律(式(5-3)和式(5-7))所构成的闭环系统状态空间表达式(式(5-5)和式(5-8))可见,只要取  $F = HC$  的状态反馈即可达到与线性非动态输出反馈  $H$  相同的控制效果。但状态反馈  $F$  所能达到的控制效果,采用线性非动态输出反馈  $H$  却不一定能实现,这是因为由方程  $HC = F$  对给定  $F$  的解  $H$  一般不存在,事实上,一般线性系统的输出  $y = Cx$  只是部分状态变量的线性组合,故线性非动态输出反馈一般可视为一种部分状态反馈,其不能像全状态反馈那样任意配置反馈系统的极点。为了克服线性非动态输出反馈的局限性,通常引入补偿器,这正是经典控制理论中广泛采用带有校正装置(如 PID 调节器等)的输出反馈控制方式。经典控制理论基于传递函数采用根轨迹法、频率响应法设计校正装置需要作图与试凑,对设计经验、技巧有一定要求,而全状态反馈基于状态空间模型采用状态反馈法配置闭环极点,一次计算即可获得结果。然而,输出反馈具有易于工程实现的突出优点,故在实践中仍有广泛应用。

输出反馈的另一结构形式是将输出量线性反馈至状态微分,其在状态观测器中有应用(见本章 5.5 节)。

### 5.3 反馈控制对能控性与能观测性的影响

不失一般性,本节讨论均设被控制系统的传递矩阵  $D=0$ 。关于被控系统引入线性直接状态反馈(简称状态反馈)或线性非动态输出反馈(简称输出反馈)控制所构成的闭环系统能控性和能观测性有如下定理:

**定理 5-1** 状态反馈不改变被控系统  $\Sigma_0(A, B, C)$  的能控性,但不一定能保持系统的能观测性。

**证明** 先从系统能控性的 PBH 秩判据出发证明状态反馈不改变被控系统  $\Sigma_0(A, B, C)$  的能控性。

显然,对复数域 $\mathbb{C}$ 上的所有 $s$ ,下式成立,即

$$[sI-A \mid B] = [sI-(A-BF) \mid B] \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -F & I_r \end{bmatrix} \quad (5-10)$$

由于式(5-10)中的 $\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -F & I_r \end{bmatrix}$ 为非奇异方阵,故有

$$\text{rank}[sI-A \mid B] = \text{rank}[sI-(A-BF) \mid B], \forall s \in \mathbb{C} \quad (5-11)$$

由能控性的 PBH 秩判据,式(5-11)表明状态反馈不改变系统的能控性,即:①当且仅当被控系统 $\Sigma_o(A, B, C)$ 能控时,状态反馈系统 $\Sigma_F(A-BF, B, C)$ 能控;②若 $\Sigma_o(A, B, C)$ 不能控,其不能控模态 $e^{\lambda t}$ 及相应的特征值 $\lambda$ 也是 $\Sigma_F(A-BF, B, C)$ 的不能控模态及相应的特征值。

关于状态反馈有可能改变系统的能观性,以单输入单输出系统为例解释如下:

被控系统 $\Sigma_o(A, B, C)$ 的传递函数

$$G_o(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI-A)^{-1}B = C \frac{X(s)}{U(s)} = C \frac{g(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (5-12)$$

引入状态反馈后的闭环系统 $\Sigma_F(A-BF, B, C)$ 的传递函数为

$$\begin{aligned} G_F(s) &= \frac{Y(s)}{V(s)} = C(sI-A+BF)^{-1}B = \frac{CX(s)}{U(s)+FX(s)} \\ &= C \frac{g(s)/D(s)}{1+F \frac{g(s)}{D(s)}} = C \frac{g(s)}{D(s)+Fg(s)} = \frac{N(s)}{D_F(s)} \end{aligned} \quad (5-13)$$

比较式(5-12)和式(5-13),引入状态反馈后传递函数的分子多项式 $N(s)$ 不变,而分母多项式可通过选择状态反馈增益向量 $F$ 而改变,即状态反馈只改变传递函数的极点而保持零点不变,若闭环系统 $\Sigma_F(A-BF, B, C)$ 的极点被配置到与 $\Sigma_o(A, B, C)$ 的零点相等时,将使 $G_F(s)$ 发生零、极点对消而破坏 $\Sigma_o(A, B, C)$ 的能观测性。

**定理 5-2** 输出反馈不改变被控系统 $\Sigma_o(A, B, C)$ 的能控性与能观测性。

**证明** 5.2 节已说明,输出反馈 $H$ 可等效为 $F=HC$ 的状态反馈,又由定理 5-1 知,状态反馈不改变被控制系统的能控性,故输出反馈不改变被控制系统的能控性。事实上,用 $HC$ 替换式(5-10)、式(5-11)中的 $F$ ,即可得到输出反馈不改变被控系统能控性的结论。

可从系统能观测性的 PBH 秩判据出发证明输出反馈不改变被控系统 $\Sigma_o(A, B, C)$ 的能观测性。显然,对复数域 $\mathbb{C}$ 上的所有 $s$ ,下式成立,即

$$\begin{bmatrix} sI-A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & -BH \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI-(A-BHC) \\ C \end{bmatrix} \quad (5-14)$$

由于式(5-14)中的 $\begin{bmatrix} I_n & -BH \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$ 为非奇异方阵,故有

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI-A \\ C \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} sI-(A-BHC) \\ C \end{bmatrix}, \forall s \in \mathbb{C} \quad (5-15)$$

由能观性的 PBH 秩判据,式(5-15)表明 $\Sigma_o(A, B, C)$ 和 $\Sigma_H(A-BHC, B, C)$ 的状态能观性是一致的,即输出反馈不改变被控制系统的能观性。

**【例 5-1】** 试分析被控系统 $\Sigma_o(A, B, C)$ :  $\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [2 \quad 1]x \end{cases}$  引入状态反馈后闭环系统

的能控性与能观性,其中,状态反馈增益阵  $F=[2 \quad 2]$ 。

解  $\Sigma_o(A, B, C)$  为能控标准型,显然能控;又其能观性判别矩阵的秩  $\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$ ,满秩,故  $\Sigma_o(A, B, C)$  能观测。

引入  $F=[2 \quad 2]$  状态反馈后的闭环系统  $\Sigma_F(A-BF, B, C)$  的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{x} = (A-BF)x + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = Cx = [2 \quad 1]x \end{cases}$$

系统  $\Sigma_F(A-BF, B, C)$  仍为能控标准型,故状态反馈系统保持了  $\Sigma_o(A, B, C)$  的能控性不变。而  $\Sigma_F(A-BF, B, C)$  的能观性判别矩阵的秩

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ C(A-BF) \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = 1 < 2$$

故  $\Sigma_F(A-BF, B, C)$  不能观。可见,  $\Sigma_o(A, B, C)$  引入  $F=[2 \quad 2]$  状态反馈后,破坏了其能观性。这是因为  $\Sigma_F(A-BF, B, C)$  的传递函数出现了零、极点相消现象。

事实上,由系统能控标准型与传递函数的对应关系,  $\Sigma_o(A, B, C)$  对应的传递函数为

$$W_o(s) = \frac{s+2}{s^2+s} = \frac{s+2}{s(s+1)}$$

引入  $F=[2 \quad 2]$  状态反馈后的  $\Sigma_F(A-BF, B, C)$  对应的传递函数为

$$W_F(s) = \frac{s+2}{s^2+3s+2} = \frac{s+2}{(s+1)(s+2)}$$

可见,  $\Sigma_F(A-BF, B, C)$  有一极点 ( $p=-2$ ) 与其零点 ( $z=-2$ ) 对消,导致极点  $p=-2$  生成的运动模态  $e^{-2t}$  不能观,即状态反馈系统不完全能观。

读者可验证,对本例中的  $\Sigma_o(A, B, C)$ ,若引入  $F=[1 \quad 1]$  状态反馈,则  $\Sigma_F(A-BF, B, C)$  能控且能观。

## 5.4 闭环系统极点配置

控制系统的性能与其极点在复平面上的分布密切相关,因此,系统综合性能指标的常见形式之一是给出复平面上一组期望极点。极点配置问题就是通过反馈增益矩阵的选择,使闭环系统的极点配置在复平面上的期望位置,以达到所希望的性能指标要求。经典控制理论中设计校正装置所采用的根轨迹法和频率响应法本质上也是实现闭环系统极点配置的一种综合方法。

选择期望极点组是确定综合性能指标的复杂问题,应遵循如下原则:

(1) 对  $n$  维系统,应指定  $n$  个期望极点,期望极点应为实数或按共轭对出现的复数;

(2) 选择期望极点位置,应充分考虑其对系统性能的主导影响及其与系统零点分布状况的关系;同时应兼顾使系统具有较强的抗干扰能力及较低的系统参数变动敏感性的要求。应注意,配置极点并非离虚轴越远越好,以免导致系统频带过宽使其抗干扰性能下降及反馈增益矩阵中的元素需要很大而导致物理实现困难且对系统动态特性产生不良影响甚至使系统饱和。

本节主要讨论两方面的问题:其一,闭环极点可任意配置的条件;其二,如何设计反馈增益矩阵使闭环极点配置在期望极点处。为简单起见,仅讨论单输入单输出系统。

### 5.4.1 采用状态反馈配置闭环系统极点

#### 1. 采用状态反馈任意配置闭环极点的充分必要条件

**定理 5-3** 采用状态反馈任意配置闭环极点的充分必要条件是系统  $\Sigma_0(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  状态完全能控。

**证明** 先证必要性。由定理 5-1 知, 若  $\Sigma_0(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  不能控, 则其不能控极点及其对应的不能控模态不能通过状态反馈改变。证毕。

再证充分性。以下充分性证明过程实际上给出了单输入单输出系统设计反馈增益矩阵的规范算法。

(1) 若被控系统  $\Sigma_0(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  :  $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$  状态完全能控, 且设其特征多项式和传递函数分别为

$$f_0(s) = \det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] = s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n \quad (5-16)$$

$$G_0(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \frac{b_1s^{n-1} + b_2s^{n-2} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} \quad (5-17)$$

可通过如下线性非奇异变换 (设  $\mathbf{T}_c$  为能控标准型变换矩阵)

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}_c \bar{\mathbf{x}} \quad (5-18)$$

将  $\Sigma_0(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  化为能控标准型  $\bar{\Sigma}_0(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}})$ , 即

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}u \\ y = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}} \end{cases} \quad (5-19)$$

式中

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}_c^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}_c &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{T}_c^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}_c &= [b_n \quad b_{n-1} \quad \cdots \quad b_2 \quad b_1] \end{aligned} \quad (5-20)$$

(2) 针对能控标准型  $\bar{\Sigma}_0(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}})$  引入线性状态反馈

$$u = v - \bar{\mathbf{F}}\bar{\mathbf{x}} \quad (5-21)$$

式中,  $\bar{\mathbf{F}} = [\bar{f}_1 \quad \bar{f}_2 \quad \bar{f}_3 \quad \cdots \quad \bar{f}_n]$ , 可求得对  $\bar{\mathbf{x}}$  的闭环系统  $\bar{\Sigma}_{\bar{\mathbf{F}}}(\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{F}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}})$  的状态空间表达式仍为能控标准型, 即

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}} = (\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{F}})\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}v \\ y = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}} \end{cases} \quad (5-22)$$

式中

$$\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -(a_n + \bar{f}_1) & -(a_{n-1} + \bar{f}_2) & -(a_{n-2} + \bar{f}_3) & \cdots & -(a_1 + \bar{f}_n) \end{bmatrix} \quad (5-23)$$



则闭环系统  $\overline{\Sigma}_F(\overline{\mathbf{A}} - \overline{\mathbf{B}}\overline{\mathbf{F}}, \overline{\mathbf{B}}, \overline{\mathbf{C}})$  的特征多项式和传递函数分别为

$$p_F(s) = \det[s\mathbf{I} - (\overline{\mathbf{A}} - \overline{\mathbf{B}}\overline{\mathbf{F}})] = s^n + (a_1 + \overline{f}_n)s^{n-1} + \cdots + (a_{n-1} + \overline{f}_2)s + (a_n + \overline{f}_1) \quad (5-24)$$

$$G_F(s) = \overline{\mathbf{C}}[s\mathbf{I} - (\overline{\mathbf{A}} - \overline{\mathbf{B}}\overline{\mathbf{F}})]^{-1}\overline{\mathbf{B}} = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + (a_1 + \overline{f}_n)s^{n-1} + \cdots + (a_{n-1} + \overline{f}_2)s + (a_n + \overline{f}_1)} \quad (5-25)$$

式(5-24)、式(5-25)表明,  $\overline{\Sigma}_F(\overline{\mathbf{A}} - \overline{\mathbf{B}}\overline{\mathbf{F}}, \overline{\mathbf{B}}, \overline{\mathbf{C}})$  的  $n$  阶特征多项式的  $n$  个系数可通过  $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3, \cdots, \overline{f}_n$  独立设置, 即  $(\overline{\mathbf{A}} - \overline{\mathbf{B}}\overline{\mathbf{F}})$  的特征值可任选, 又线性非奇异变换不改变系统的特征值, 即  $f_F(s) = \det[s\mathbf{I} - (\overline{\mathbf{A}} - \overline{\mathbf{B}}\overline{\mathbf{F}})] = \det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F})]$ , 故若被控系统  $\Sigma_0(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  能控, 则其状态反馈系统极点可任意配置。

(3) 事实上, 由给定的期望闭环极点组  $\lambda_i^* (i=1, 2, \cdots, n)$ , 可写出期望闭环特征多项式

$$p^*(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i^*) = s^n + a_1^* s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}^* s + a_n^* \quad (5-26)$$

令式(5-24)与式(5-26)相等, 可解出能控标准型  $\overline{\Sigma}_0(\overline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{B}}, \overline{\mathbf{C}})$  使闭环极点配置到期望极点的状态反馈增益矩阵为

$$\overline{\mathbf{F}} = [\overline{f}_1 \quad \overline{f}_2 \quad \cdots \quad \overline{f}_n] = [a_n^* - a_n \quad a_{n-1}^* - a_{n-1} \quad \cdots \quad a_1^* - a_1] \quad (5-27)$$

(4) 将式(5-18)代入式(5-21)得

$$u = v - \overline{\mathbf{F}}\mathbf{x} = v - \overline{\mathbf{F}}\mathbf{T}_c^{-1}\mathbf{x} = v - \mathbf{F}\mathbf{x} \quad (5-28)$$

则原被控系统  $\Sigma_0(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  即对应于状态  $\mathbf{x}$  引入状态反馈使闭环极点配置到期望极点的状态反馈增益矩阵为

$$\mathbf{F} = \overline{\mathbf{F}}\mathbf{T}_c^{-1} \quad (5-29)$$

## 2. 采用状态反馈配置闭环极点的方法

### 方法一 规范算法

对状态完全能控的单输入单输出被控系统  $\Sigma_0(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ , 可采用以上状态反馈任意配置极点的充分条件证明过程所给出的规范算法确定实现闭环极点配置目标的反馈增益矩阵  $\mathbf{F}$ , 即在根据式(5-16)、式(5-26)分别确定开环系统  $\Sigma_0(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  特征多项式和期望闭环特征多项式系数的基础上, 先用式(5-27)求出能控标准型  $\overline{\Sigma}_0(\overline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{B}}, \overline{\mathbf{C}})$  对应的  $\bar{\mathbf{x}}$  下的状态反馈增益矩阵  $\overline{\mathbf{F}}$ ; 然后再根据式(5-29)将  $\overline{\mathbf{F}}$  变换为原状态  $\mathbf{x}$  下的状态反馈增益矩阵  $\mathbf{F}$ , 即

$$\mathbf{F} = [a_n^* - a_n \quad a_{n-1}^* - a_{n-1} \quad \cdots \quad a_1^* - a_1]\mathbf{T}_c^{-1} \quad (5-30)$$

式中,  $\mathbf{T}_c^{-1}$  为按式(5-18)将  $\Sigma_0(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  化为能控标准型  $\overline{\Sigma}_0(\overline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{B}}, \overline{\mathbf{C}})$  的变换矩阵  $\mathbf{T}_c$  的逆矩阵, 即有:  $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{T}_c^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}_c$ ;  $\overline{\mathbf{B}} = \mathbf{T}_c^{-1}\mathbf{B}$ ;  $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}_c$ , 由 3.10 节知  $\mathbf{T}_c^{-1}$  由下式确定, 即

$$\mathbf{T}_c^{-1} = \left[ \begin{array}{ccc|c} & & & 1 \\ & & & \vdots \\ & & & a_1 \\ \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{array} \begin{array}{c} a_{n-1} \quad \cdots \quad a_1 \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_1 \quad 1 \\ 1 \end{array} \right]^{-1} \quad (5-31)$$

或

$$\mathbf{T}_c^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_1\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{T}_1\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (5-32)$$

式中,行向量  $T_1$  为  $\Sigma_o(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  能控性判别矩阵  $\mathbf{Q}_c$  的逆矩阵的最后一行,即

$$T_1 = [0 \ 0 \ \cdots \ 1] \mathbf{Q}_c^{-1} = [0 \ 0 \ \cdots \ 1] [\mathbf{B} \ \mathbf{AB} \ \cdots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]^{-1} \quad (5-33)$$

### 方法二 解联立方程

设状态反馈增益矩阵  $\mathbf{F} = [f_1 \ f_2 \ \cdots \ f_n]$ , 则闭环系统  $\Sigma_F(\mathbf{A} - \mathbf{BF}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  的特征多项式为

$$p_F(s) = \det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BF})] = p_F(s, f_1, f_2, \cdots, f_n) = s^n + \beta_1 s^{n-1} + \cdots + \beta_{n-1}s + \beta_n \quad (5-34)$$

而由给定的期望闭环极点组  $\lambda_i^* (i=1, 2, \cdots, n)$ , 可确定如式(5-26)所示的期望闭环特征多项式。为将闭环极点配置在期望位置, 应令式(5-34)与式(5-26)相等, 即令  $p_F(s) = p^*(s)$ , 由两个  $n$  阶特征多项式对应项系数相等, 可得  $n$  个关于  $f_1, f_1, \cdots, f_n$  的联立代数方程, 若  $\Sigma_o(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  能控, 解联立方程可求出唯一解  $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 。当被控系统  $\Sigma_o(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  的阶次较低时可采用该方法。

**【例 5-2】** 被控系统  $\Sigma_o(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  的状态空间表达式为  $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 1] \mathbf{x} \end{cases}$ , 试设计状态

反馈增益矩阵  $\mathbf{F}$ , 使闭环系统极点配置为  $-1+j$  和  $-1-j$ , 并画出状态变量图。

**解** (1) 判断被控系统的能控性

$$\text{rank } \mathbf{Q}_c = \text{rank}[\mathbf{B} \ \vdots \ \mathbf{AB}] = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 2 = n$$

所以被控系统状态完全能控, 可通过状态反馈任意配置闭环系统极点。

(2) 确定闭环系统期望特征多项式

闭环系统期望极点为  $\lambda_{1,2}^* = -1 \pm j$ , 对应的期望闭环特征多项式为

$$p^*(s) = (s - \lambda_1^*)(s - \lambda_2^*) = (s + 1 - j)(s + 1 + j) = s^2 + 2s + 2$$

则  $a_2^* = 2, a_1^* = 2$ 。

(3) 求满足期望极点配置要求的状态反馈增益阵  $\mathbf{F} = [f_1 \ f_2]$

**方法一 规范算法**

被控系统  $\Sigma_o(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  的特征多项式为

$$p_o(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} s-1 & -3 \\ 0 & s+1 \end{vmatrix} = s^2 - 1$$

则  $a_2 = -1, a_1 = 0$ 。

根据式(5-27), 能控标准型  $\overline{\Sigma}_o(\overline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{B}}, \overline{\mathbf{C}})$  对应的  $\overline{\mathbf{x}}$  下的状态反馈增益矩阵  $\overline{\mathbf{F}}$  为

$$\overline{\mathbf{F}} = [\overline{f}_1 \ \overline{f}_2] = [a_2^* - a_2 \quad a_1^* - a_1] = [2 - (-1) \quad 2 - 0] = [3 \ 2]$$

按式(5-18)将  $\Sigma_o(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  化为能控标准型  $\overline{\Sigma}_o(\overline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{B}}, \overline{\mathbf{C}})$  的变换矩阵  $\mathbf{T}_c$  为

$$\mathbf{T}_c = [\mathbf{B} \ \mathbf{AB}] \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

则

$$\mathbf{T}_c^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

则根据式(5-29), 原状态  $\mathbf{x}$  下的状态反馈增益矩阵  $\mathbf{F}$  应为

$$\mathbf{F} = [f_1 \quad f_2] = \bar{\mathbf{F}}\mathbf{T}_c^{-1} = [3 \quad 2] \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & 2 \end{bmatrix}$$

### 方法二 解联立方程

对被控系统 $\Sigma_0(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ , 引入 $\mathbf{F} = [f_1 \quad f_2]$ 状态反馈后的闭环系统 $\Sigma_F(\mathbf{A} - \mathbf{BF}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 特征多项式为

$$p_F(s) = \det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BF})] = \begin{vmatrix} s-1 & -3 \\ f_1 & s+1+f_2 \end{vmatrix} = s^2 + f_2s + 3f_1 - f_2 - 1$$

令 $p_F(s) = p^*(s)$ , 即 $s^2 + f_2s + 3f_1 - f_2 - 1 = s^2 + 2s + 2$ , 比较等式两边同次幂项系数得如下联立方程

$$\begin{cases} f_2 = 2 \\ 3f_1 - f_2 - 1 = 2 \end{cases}$$

解之得 $f_1 = 5/3, f_2 = 2$ 。

(4) 根据被控系统状态空间表达式和所设计的状态反馈增益矩阵 $\mathbf{F}$ , 可画出状态反馈后的闭环系统状态变量图, 如图 5-3 所示。

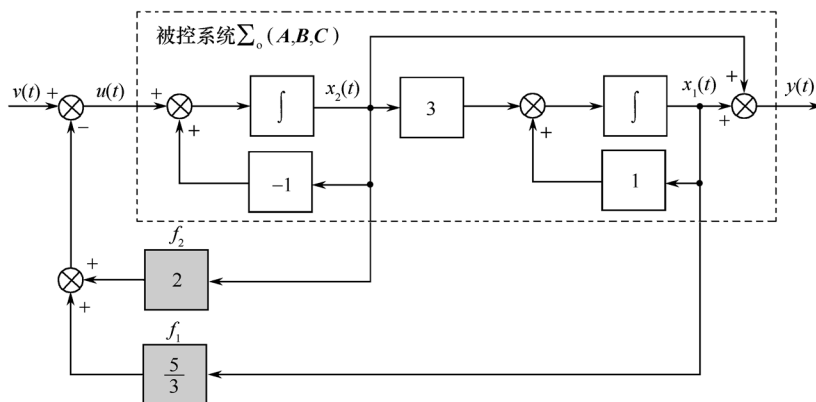


图 5-3 例 5-2 图

### 3. 采用状态反馈进行部分极点配置

若被控系统 $\Sigma_0(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 状态不完全能控, 采用状态反馈只能将其能控子系统的极点配置到期望位置, 而不可能移动其不能控子系统的极点。换言之, 对状态不完全能控的 $n$ 阶系统 $\Sigma_0(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 而言, 若期望配置的 $n$ 个极点中包含其全部的不能控极点, 那么这一组闭环极点是可以采用状态反馈进行配置的(这时实质上只是配置了被控制系统的能控极点); 否则, 就不能采用状态反馈配置 $n$ 个极点。请读者完成本章的上机实验题, 加深对部分极点配置问题的理解。

### 5.4.2 采用线性非动态输出反馈至参考输入配置闭环系统极点

**定理 5-4** 完全能控的系统不能靠引入式(5-7)所示的线性非动态输出反馈控制来任意配置闭环系统的极点。

对定理 5-4 以单输入单输出系统为例加以说明。这时, 输出反馈矩阵为反馈放大系数(标量) $H$ , 由经典控制理论的根轨迹法, 改变反馈放大系数 $H$ 时的闭环极点变化的轨迹是起于开环极点, 终于开环零点或无限远点的一组根轨迹, 即闭环极点不能配置在复平面的任意位置。

不能任意配置反馈系统的极点正是线性非动态输出反馈的局限。为了克服这一局限, 经典

控制理论中,广泛采用带有校正网络(动态补偿器)的输出反馈控制方式,即通过增加开环零、极点以改变根轨迹走向,实现闭环极点的期望配置。关于这一问题,在现代控制理论中,有如下定理。

**定理 5-5** 对完全能控的单输入单输出系统 $\Sigma_0(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ ,通过带动态补偿器的输出反馈实现极点任意配置的充要条件为:

- (1)  $\Sigma_0(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 完全能观;
- (2) 动态补偿器的阶数为  $n-1$ 。

应该指出,若实际问题并不要求“任意”配置闭环极点,则所需动态补偿器的阶数可小于  $n-1$ 。

### 5.4.3 镇定问题

若被控系统 $\Sigma_0(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 通过状态反馈(或输出反馈)能使其闭环极点均具有负实部,即闭环系统渐近稳定,则称系统是状态反馈(或输出反馈)可镇定的。

镇定问题是一种特殊的闭环极点配置问题,其期望闭环极点均只要求具有负实部。

基于对状态反馈不能改变系统不能控模态的认识,容易理解如下定理。

**定理 5-6** 线性定常系统 $\Sigma_0(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 采用状态反馈可镇定的充要条件是其不能控子系统为渐近稳定。

而对于线性非动态输出反馈可镇定的条件则有定理 5-7。

**定理 5-7** 线性定常系统 $\Sigma_0(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 采用输出反馈可镇定的充要条件是 $\Sigma_0(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 结构分解中的能控且能观子系统是输出反馈可镇定的;而能控不能观、能观不能控、不能控且不能观的 3 个子系统均为渐近稳定。

**【例 5-3】** 被控系统 $\Sigma_0(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 的状态空间表达式为
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0] \mathbf{x} \end{cases}$$
试设计状态反

馈增益矩阵  $\mathbf{F}$ ,使闭环系统得到镇定。该被控系统采用线性非动态输出反馈可否镇定?

**解**  $\Sigma_0(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 为能控标准型,显然能控,故可采用状态反馈使闭环系统镇定。若设期望极点为  $\lambda_1^* = -1, \lambda_2^* = -2$ ,则对应的期望闭环特征多项式为

$$p^*(s) = (s - \lambda_1^*)(s - \lambda_2^*) = (s + 1)(s + 2) = s^2 + 3s + 2$$

由规范算法可确定满足期望极点配置要求的状态反馈增益矩阵  $\mathbf{F} = [f_1 \quad f_2] = [2 \quad 3]$ ,对应的闭环系统状态变量图如图 5-4(a)所示。但若 $\Sigma_0(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 采用线性非动态输出反馈,则闭环系统 $\Sigma_H(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{H}\mathbf{C}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 的特征多项式为

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}h\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ h & s \end{vmatrix} = s^2 + h$$

可见,引入反馈放大系数为  $h$  的线性非动态输出反馈后的闭环特征多项式仍缺项,不论如何选择反馈放大系数  $h$ ,均不能使闭环系统镇定,即该系统采用线性非动态输出反馈不可镇定。进一步检验,该系统不仅能控且能观,本例表明,能控且能观系统采用线性非动态输出反馈不一定能镇定。

由图 5-4(a)可画出图 5-4(b)所示的状态反馈闭环系统等效方块图,其等效为在输出反馈控制回路中嵌入反馈动态补偿器  $H(s)$ ,即若采用  $H(s) = 3s + 2$  的输出动态反馈可达到与引入  $\mathbf{F} = [f_1 \quad f_2] = [2 \quad 3]$  线性状态反馈一样的控制效果(将闭环极点配置在  $\lambda_1^* = -1, \lambda_2^* = -2$ )。但从  $H(s)$  的结构看,其包括比例环节和一阶微分环节,在物理上较上述状态线性反馈复杂且难于实现。

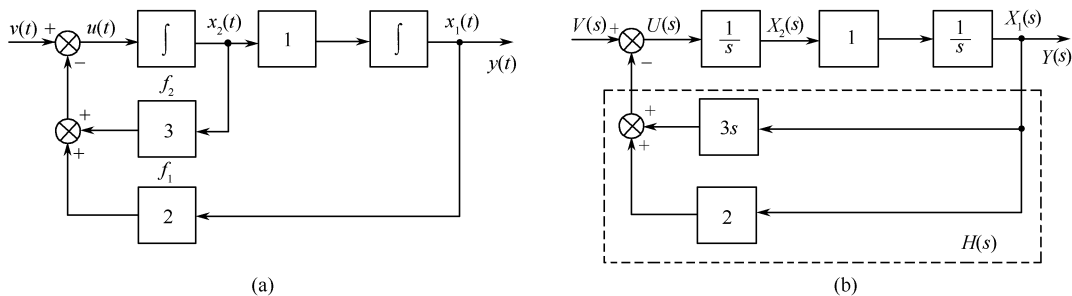


图 5-4 例 5-3 图

请读者思考本题若采用输出反馈附加串联校正网络的控制方式,仍要求将闭环极点配置在  $\lambda_1^* = -1, \lambda_2^* = -2$ , 则所需串联校正网络的结构和参数是什么?

## 5.5 状态观测器

状态反馈是改善系统性能的重要方法,其不仅可改善被控系统的稳定性、稳态误差和动态品质因数,而且可实现闭环系统的解耦控制(见 5.7 节)和最优控制(见第 6 章)。状态反馈实现的前提是获得系统全部状态信息,然而,状态变量并不一定是表示系统的物理量,选择状态变量的这种自由性本是状态空间综合法的优点之一,但这也使得系统的所有状态变量不一定都能直接量测;另一方面,有些状态变量即使可测,但所需传感器的价格可能会过高。状态观测或状态重构问题正是为了克服状态反馈物理实现的这些困难而提出的,其核心是通过系统可量测参量(输出及输入)重新构造在一定指标下和系统真实状态  $\mathbf{x}(t)$  等价的估计状态或重构状态  $\hat{\mathbf{x}}(t)$ ,且常采用式(5-35)所示的渐近等价指标,即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta_{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0} \quad (5-35)$$

式中,  $\Delta_{\mathbf{x}}(t)$  为观测误差。实现状态重构的系统(或计算机程序)称为状态观测器,式(5-35)也称观测器存在条件。当观测器重构状态向量的维数等于或小于被控系统状态向量维数时,分别称为全维状态观测器或降维状态观测器。20 世纪 60 年代, Luenberger 提出的状态观测器理论解决了在确定性控制条件下被控系统的状态重构问题;而 Kalman 滤波理论则是针对在随机扰动和量测噪声情况下动态系统状态估计问题而提出的。随着观测器理论及 Kalman 滤波理论的发展,状态反馈的物理实现问题已基本解决。关于 Kalman 滤波方法,读者可参阅随机控制、滤波理论等方面的有关文献,本节仅限于讲述确定性控制条件下系统状态观测器的设计原理与方法。

### 5.5.1 全维观测器的构造思想

设式(5-2)所示的被控系统  $\Sigma_0(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  状态完全能观,一条重构状态向量的可能途径是对输出  $\mathbf{y}(t)$  求导  $n-1$  次,即

$$\begin{cases} \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u} \\ \ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{C}\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{B}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{x} + \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{C}\mathbf{B}\dot{\mathbf{u}} \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n-1)} = \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{x} + \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-2}\mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-3}\mathbf{B}\dot{\mathbf{u}} + \cdots + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}^{(n-2)} \end{cases} \quad (5-36)$$

因为  $\Sigma_0(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  能观,则其能观性判别矩阵的秩为  $n$ ,故由式(5-36)一定可选出关于状态

变量的  $n$  个独立方程,进而获得  $\mathbf{x}(t)$  的唯一解。可见,只要被控系统能观,理论上可通过输入/输出及它们的导数重构系统状态向量  $\mathbf{x}(t)$ 。但这种方法要对输入/输出进行微商运算,而纯微分器难以构造;且微分器不合理地放大输入/输出测量中混有的高频干扰,以致状态估计值产生很大误差,故从工程实际出发,该方法不可取。

为避免在状态重构中采用微分运算,一个直观的想法是构造一个与  $\Sigma_o(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  结构和参数相同的(计算机)仿真系统  $\Sigma_g(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  来观测系统的实际状态  $\mathbf{x}(t)$ ,且让  $\Sigma_g$  与  $\Sigma_o$  具有相同的输入,如图 5-5 所示。显然,在假设矩阵  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  和  $\mathbf{C}$  在实际被控对象  $\Sigma_o$  中及其计算机仿真系统  $\Sigma_g$  中相同的前提下,只要设置  $\Sigma_g$  的初态与  $\Sigma_o$  的初态相同,即  $\hat{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{x}(t_0)$ ,则可保证重构状态  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  与系统的实际状态  $\mathbf{x}(t)$  始终相同。尽管只要  $\Sigma_o$  能观,根据输入和输出的测量值总能计算出系统的初态  $\mathbf{x}(t_0)$ ,但每次应用图 5-5 所示的开环观测器均要计算  $\mathbf{x}(t_0)$  并设置  $\hat{\mathbf{x}}(t_0)$ ,计算量太大。另一方面,开环观测器的观测误差  $\Delta_x(t)$  所满足的微分方程为

$$\dot{\Delta}_x(t) = \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) - \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}[\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)] = \mathbf{A}\Delta_x \quad (5-37)$$

而由于存在外界扰动和设置误差,通常  $\hat{\mathbf{x}}(t_0) \neq \mathbf{x}(t_0)$ ,即  $\Delta_x(t_0) \neq \mathbf{0}$ ,这时由式(5-37)可得观测误差  $\Delta_x(t)$  为

$$\Delta_x(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \Delta_x(t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} [\hat{\mathbf{x}}(t_0) - \mathbf{x}(t_0)] \quad (5-38)$$

式(5-38)表明,只有当  $\Sigma_o$  的系统矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值均具有负实部时,才满足式(5-35)所示的观测器存在条件;若  $\Sigma_o$  为不稳定系统,则  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  将不能复现  $\mathbf{x}(t)$ 。因此,一般而言,开环观测器也无实用价值。

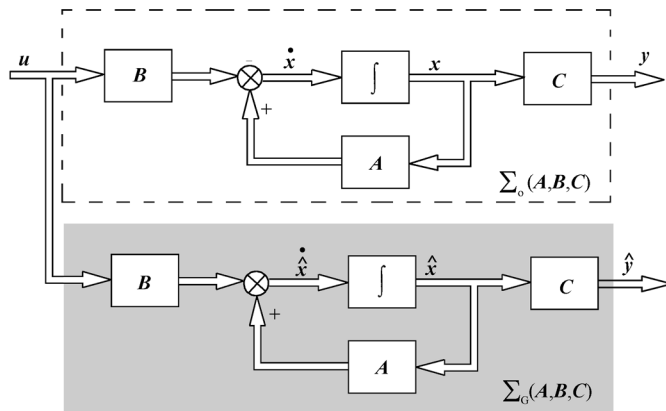


图 5-5 开环观测器

可应用反馈控制原理对图 5-5 所示的开环观测器方案进行改进,即引入观测误差  $\Delta_x(t) = \hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)$  负反馈,以不断修正仿真系统,加快观测误差趋于零的速度。但  $\Delta_x(t)$  不可直接量测,而  $\Delta_x(t) \neq \mathbf{0}$  对应  $\hat{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \neq \mathbf{0}$ ,且系统输出估计值与实际值的误差  $\hat{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{y}(t)$  可量测,故引入输出偏差  $\hat{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{y}(t)$  负反馈至观测器的  $\hat{\mathbf{x}}$  处,构成以  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{y}$  为输入、 $\hat{\mathbf{x}}(t)$  为输出的闭环渐近状态观测器,如图 5-6 所示,其采用了输出反馈的另一种结构,是一种较实用的观测器结构。图 5-6 中,  $\mathbf{G}$  为  $n \times m$  输出偏差反馈增益矩阵( $m$  为系统输出变量的个数),且其为实数阵。由图 5-6 可得闭环状态观测器的状态方程为

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{G}(\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}) + \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{G}\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{G}\mathbf{y} + \mathbf{B}\mathbf{u} = (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{G}\mathbf{y} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (5-39)$$

由式(5-39)及待观测系统  $\Sigma_o$  的状态方程,可得闭环观测器的观测误差  $\Delta_x(t)$  所满足的微分方程为

$$\dot{\Delta}_x(t) = \dot{\hat{x}}(t) - \dot{x}(t) = (A - GC)[\hat{x}(t) - x(t)] = (A - GC)\Delta_x \quad (5-40)$$

设初始时刻  $t_0 = 0$ , 式(5-40)的解为

$$\Delta_x(t) = e^{(A-GC)t} \Delta_x(0) = e^{(A-GC)t} [\hat{x}(0) - x(0)] \quad (5-41)$$

式(5-40)及式(5-41)表明,若通过选择输出偏差反馈增益矩阵  $G$  使  $A - GC$  的所有特征值均位于复平面的左半开平面,尽管初始时刻  $t_0 = 0$  时  $x(0)$  与  $\hat{x}(0)$  存在差异,观测器的状态  $\hat{x}(t)$  仍将以一定精度和速度渐渐逼近系统的实际状态  $x(t)$ ,即满足式(5-35)所示的渐近等价指标,故闭环观测器也称为渐近观测器。显然,观测误差  $\Delta_x(t)$  趋于零的收敛速率由观测器系统矩阵  $A - GC$  的主特征值决定,可证明若  $\Sigma_0(A, B, C)$  能观,则闭环观测器的极点即  $A - GC$  的特征值可通过选择偏差反馈增益矩阵  $G$  而任意配置。

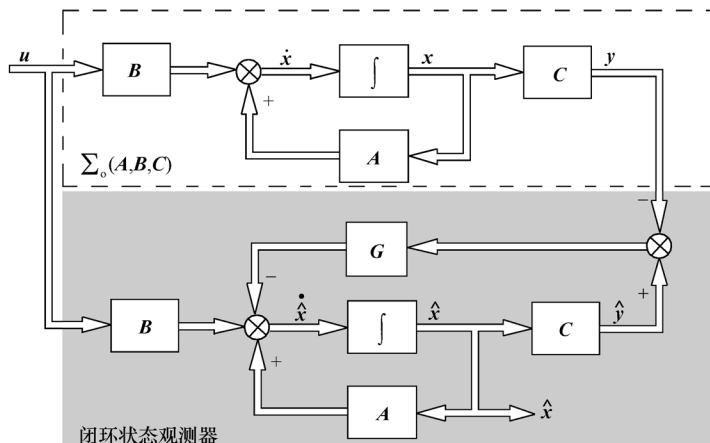


图 5-6 闭环(渐近)状态观测器

## 5.5.2 闭环观测器极点配置

### 1. 闭环观测器极点任意配置的充分必要条件

**定理 5-8** 图 5-6 中闭环状态观测器的极点可任意配置的充分必要条件是受控系统  $\Sigma_0(A, B, C)$  能观测。

该定理可由定理 5-3 和对偶原理证明。因为  $\Sigma_0(A, B, C)$  能观测,则其对偶系统  $\Sigma(A^T, C^T, B^T)$  能控,根据定理 5-3 知采用状态反馈可使闭环系统  $\Sigma_F(A^T - C^T F, C^T, B^T)$  的极点即  $A^T - C^T F$  的特征值配置在复平面任意位置,又根据矩阵转置不改变其特征值,可断定若取  $G = F^T$ ,则  $A - F^T C = A - GC$  的特征值可任意配置。

定理 5-8 表明,若  $n$  维被控系统  $\Sigma_0(A, B, C)$  能观测,则其状态可用图 5-6 中的  $n$  维闭环状态观测器给出估计值,且其中输出偏差反馈增益矩阵  $G$  按使观测器系统矩阵  $A - GC$  具有任意所期望特征值的需要选择,以使观测误差以期望的收敛速率趋于零。

应该指出,系统能观测,只是其观测器存在的充分条件,并非必要条件。对系统  $\Sigma_0(A, B, C)$ ,观测器存在的充分必要条件是  $\Sigma_0$  的不能观子系统为渐近稳定。事实上,即使系统  $\Sigma_0(A, B, C)$  不完全能观测,只要其不能观子系统是渐近稳定的,仍可构造状态观测器重构系统状态,但这时因不能任意配置闭环观测器的极点,故  $\hat{x}(t)$  逼近  $x(t)$  的速度将不能任意控制,而要受限于不能观子系统的极点。

### 2. 输出偏差反馈增益矩阵 $G$ 的设计

如前所述,全维闭环状态观测器的设计就是确定合适的输出偏差反馈增益矩阵  $G$ ,使  $A - GC$

具有期望的特征值,从而使由式(5-40)描述的观测误差动态方程以足够快的响应速度渐近稳定。从加快  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  逼近  $\mathbf{x}(t)$  速度的角度看,观测器应有足够宽的频带,即期望观测器的极点在复平面左半开平面且远离虚轴;但从抑制高频干扰及超调、防止因反馈增益矩阵  $\mathbf{G}$  的数值过大带来饱和效应等实现困难的角度看,观测器的频带不应太宽,即闭环观测器的极点并非离虚轴越远越好。因此,闭环观测器期望极点的选择应从工程实际出发,兼顾快速性、抗干扰性等折中考虑。但应指出,通常所选择的闭环观测器期望极点,应使得状态观测器的响应速度至少比所考虑的状态反馈闭环系统快 2~5 倍。

显然,状态完全能观测的单输入单输出系统,闭环观测器的极点配置设计可仿照 5.4 节介绍的状态完全能控的单输入单输出系统用状态反馈进行闭环极点配置的设计方法进行;也可基于对偶原理采用在对偶系统中由状态反馈配置闭环极点方法确定状态反馈增益阵  $\mathbf{F}$ ,再根据  $\mathbf{G} = \mathbf{F}^T$  确定原系统观测器偏差反馈增益矩阵  $\mathbf{G}$ 。

$$\text{若单输入单输出系统 } \Sigma_o(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}): \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \text{ 状态完全能观,其特征多项式为} \\ f_o(s) = \det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n \quad (5-42)$$

设  $\lambda_i^*$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 为闭环状态观测器系统矩阵期望特征值,对应的期望特征多项式为

$$p^*(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i^*) = s^n + a_1^* s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}^* s + a_n^* \quad (5-43)$$

若  $\Sigma_o(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  为能观标准型,则所需的观测器偏差反馈增益矩阵为

$$\mathbf{G}_o = \begin{bmatrix} a_n^* - a_n \\ a_{n-1}^* - a_{n-1} \\ \vdots \\ a_1^* - a_1 \end{bmatrix} \quad (5-44)$$

若  $\Sigma_o(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  不具有能观标准型时,则可采用线性非奇异变换(设  $\mathbf{T}_o$  为能观标准型变换阵)

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}_o \bar{\mathbf{x}} \quad (5-45)$$

将系统  $\Sigma_o(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}): \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$  化为能观标准型  $\bar{\Sigma}_o(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}}): \begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}u \\ y = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}} \end{cases}$ , 其中,

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}_o^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{T}_o^{-1} \mathbf{B}, \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{T}_o = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1], \text{ 则先用}$$

式(5-44)求出能观标准型  $\bar{\Sigma}_o(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}})$  对应的  $\bar{\mathbf{x}}$  下的观测器增益矩阵  $\mathbf{G}_o$ , 然后再将  $\bar{\mathbf{x}}$  下求得的  $\mathbf{G}_o$  变换到原状态  $\mathbf{x}$  下, 即得重构系统  $\Sigma_o(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  状态  $\mathbf{x}$  所需的观测器偏差反馈增益矩阵为

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} = \mathbf{T}_o \mathbf{G}_o = \mathbf{T}_o \begin{bmatrix} a_n^* - a_n \\ a_{n-1}^* - a_{n-1} \\ \vdots \\ a_1^* - a_1 \end{bmatrix} \quad (5-46)$$



$$\text{式中} \quad T_o = \left[ \begin{array}{ccc|c} a_{n-1} & \cdots & a_1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_1 & & 1 & \\ \hline 1 & & & \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{array} \right]^{-1} \quad (5-47)$$

$$\text{或} \quad T_o = [\mathbf{P}_1 \quad \mathbf{A}\mathbf{P}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{P}_1] \quad (5-48)$$

式中,列向量  $\mathbf{P}_1$  为  $\Sigma_o(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  能观性判别矩阵  $\mathbf{Q}_o$  的逆矩阵的最后一列,即

$$\mathbf{P}_1 = \left[ \begin{array}{c} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{array} \right]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5-49)$$

以上给出了状态完全能观的单输入单输出系统全维闭环状态观测器设计的规范型方法,其推导予以省略,读者可仿照式(5-30)的推导过程自行推导。

实际上,式(5-46)也可通过其对偶问题由式(5-30)推出,请读者完成。

**【例 5-4】** 被控系统  $\Sigma_o(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  的状态空间表达式为  $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 1] \mathbf{x} \end{cases}$ , 试设计全维

状态观测器,使其极点为  $-3, -3$ 。

**解** (1) 判断系统的能观性

$$\text{rank } \mathbf{Q}_o = \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 2 = n$$

所以系统状态完全能观,可建立状态观测器,且观测器的极点可任意配置。

(2) 确定闭环状态观测器系统矩阵的期望特征多项式

观测器系统矩阵  $\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C}$  的期望特征值为  $\lambda_1^* = \lambda_2^* = -3$ , 对应的期望特征多项式为

$$p^*(s) = (s - \lambda_1^*)(s - \lambda_2^*) = (s + 3)(s + 3) = s^2 + 6s + 9$$

则  $a_2^* = 9, a_1^* = 6$ 。

(3) 求所需的观测器偏差反馈增益矩阵  $\mathbf{G} = [g_1 \quad g_2]^T$

**方法一** 规范算法

在例 5-2 中,已求得系统  $\Sigma_o(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  的特征多项式为:  $p_o(s) = s^2 - 1$ , 则  $a_2 = -1, a_1 = 0$ 。

根据式(5-44)能观标准型  $\bar{\Sigma}_o(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}})$  对应的  $\bar{\mathbf{x}}$  下的状态观测器增益矩阵为

$$\mathbf{G}_o = \begin{bmatrix} a_2^* - a_2 \\ a_1^* - a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 - (-1) \\ 6 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix}$$

按式(5-47)将  $\Sigma_o(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  化为能观标准型  $\bar{\Sigma}_o(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}})$  的变换矩阵  $\mathbf{T}_o$  为

$$\mathbf{T}_o = \left( \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} \right)^{-1} = \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

则根据式(5-46),重构系统  $\Sigma_o(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  状态  $\mathbf{x}$  所需的观测器偏差反馈增益矩阵  $\mathbf{G}$  为

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_o \mathbf{G}_o = \mathbf{T}_o \begin{bmatrix} a_2^* - a_2 \\ a_1^* - a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

**方法二** 解联立方程

与状态反馈闭环系统极点配置的情况类似,若系统是低阶的,将观测器偏差反馈增益矩阵  $\mathbf{G}$  直接代入所期望的特征多项式往往较为简便。观测器系统矩阵  $\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C}$  的特征多项式为

$$p_o(s) = \det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{GC})] = \det \left[ \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 & g_1 \\ g_2 & g_2 \end{bmatrix} \right] = \begin{vmatrix} s-1+g_1 & -3+g_1 \\ g_2 & s+1+g_2 \end{vmatrix}$$

$$= s^2 + (g_1 + g_2)s + 2g_2 + g_1 - 1$$

令  $p_o(s) = p^*(s)$ , 即  $s^2 + (g_1 + g_2)s + 2g_2 + g_1 - 1 = s^2 + 6s + 9$ , 比较等式两边同次幂项系数, 得如下联立方程

$$\begin{cases} g_1 + g_2 = 6 \\ g_1 + 2g_2 - 1 = 9 \end{cases}$$

解之, 得  $g_1 = 2, g_2 = 4$ 。

(4) 由式(5-39), 观测器的状态方程为

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u - \mathbf{G}(\hat{y} - y) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} (\hat{y} - y)$$

或

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{GC})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{G}y + \mathbf{B}u = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

被控系统及全维状态观测器的状态变量图如图 5-7(a)或图 5-7(b)所示。

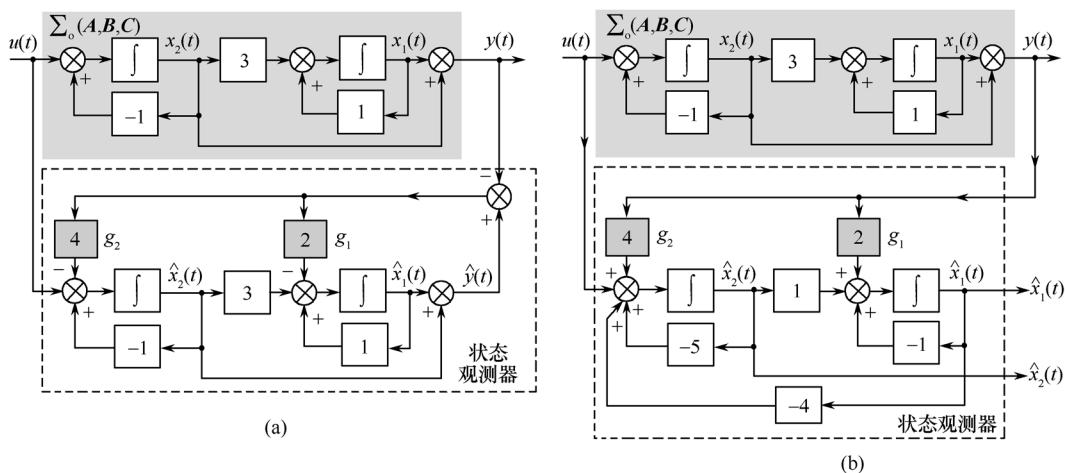


图 5-7 例 5-4 图

### 5.5.3 降维观测器

前面所讨论的全维观测器设计是在对原系统仿真的基础上重构其全部状态变量, 因而, 观测器的维数与所观测的原系统维数  $n$  相同。但全维观测器结构较复杂, 交叉耦合也较多, 这给工程实现及调试均带来了一定的困难。实际上, 对系统中那些可直接且精确测量的状态变量可不必估计, 因此, 降低观测器的复杂程度是可能的。系统的输出量  $y$  总是可测量的, 而输出方程  $y = \mathbf{C}\mathbf{x}$  表明输出  $y$  中含有可利用的状态信息, 若其中某些状态变量可由  $y$  各分量简单线性组合出来, 则可不必要重构这些状态变量, 从而使观测器的维数从全维  $n$  降下来, 这就是降维观测器的基本出发点。

以状态完全能观测的单变量系统  $\Sigma_o(A, B, C)$ :  $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$  为例, 设其状态空间表达式为能

观标准型, 或已经线性非奇异变换化为能观标准型, 即其输出方程为

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_n \quad (5-50)$$

式(5-50)表明,状态变量  $x_n$  可直接用原系统的输出  $y$  代替而不必重构,故只需建立  $n-1$  维的降维观测器,对其余的  $n-1$  个状态变量做出估计。这一结论可推广到具有  $m$  个彼此相互独立输出变量的多变量系统,可以证明:若多变量系统能观且输出矩阵  $\mathbf{C}$  的秩为  $m$ ,则系统的  $m$  个状态变量可用系统的  $m$  个输出变量直接代替或线性表达而不必重构,只需建立  $(n-m)$  维的降维观测器(常称为 Luenberger 观测器)对其余的  $(n-m)$  个状态变量进行重构。下面介绍降维观测器的设计方法。

设能观测被控系统  $\Sigma_o(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (5-51)$$

式中,  $\mathbf{x}, u, \mathbf{y}$  分别为  $n, r, m$  维列向量;  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  分别为  $n \times n, n \times r, m \times n$  维实数矩阵,并设输出矩阵  $\mathbf{C}$  的秩为  $m$ ,则  $(n-m)$  维降维观测器的一般设计方法如下:

构造  $n \times n$  非奇异矩阵  $\mathbf{T}$  为

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{n-m} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (5-52)$$

式中,  $m \times n$  维矩阵  $\mathbf{C}$  为  $\Sigma_o(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  的输出矩阵,因为  $\mathbf{C}$  的秩为  $m$ ,故  $\mathbf{C}$  的  $m$  个行向量线性无关;  $\mathbf{T}_{n-m}$  是使矩阵  $\mathbf{T}$  非奇异而任意选择的  $(n-m)$  个行向量组成的  $(n-m) \times n$  维矩阵。

$\mathbf{T}$  的逆矩阵  $\mathbf{T}^{-1}$  以分块矩阵的形式表示为

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{n-m} & \mathbf{Q}_m \end{bmatrix} \quad (5-53)$$

式中,  $\mathbf{Q}_{n-m}$  为  $n \times (n-m)$  维矩阵;  $\mathbf{Q}_m$  为  $n \times m$  维矩阵。显然,有

$$\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{n-m} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{n-m} & \mathbf{Q}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{n-m}\mathbf{Q}_{n-m} & \mathbf{T}_{n-m}\mathbf{Q}_m \\ \mathbf{C}\mathbf{Q}_{n-m} & \mathbf{C}\mathbf{Q}_m \end{bmatrix} = \mathbf{I}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n-m} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \quad (5-54)$$

现在对式(5-51)进行线性非奇异变换

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1}\bar{\mathbf{x}} \quad (5-55)$$

式中,  $\mathbf{T}$  为式(5-52)所示的非奇异矩阵,变换矩阵  $\mathbf{T}^{-1}$  为  $\mathbf{T}$  的逆矩阵,则将  $\Sigma_o(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  变换为按输出分解形式的  $\bar{\Sigma}_o(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}})$ , 即

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{T}\mathbf{B}u = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}u \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{C}[\mathbf{Q}_{n-m} \quad \mathbf{Q}_m]\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix}\bar{\mathbf{x}} \end{cases} \quad (5-56a)$$

式中,  $\mathbf{0}$  为  $m \times (n-m)$  维零矩阵,  $\mathbf{I}_m$  为  $m \times m$  维单位矩阵。由式(5-56a)的输出方程可见,  $\bar{\mathbf{x}}$  中的后  $m$  个状态分量可用系统的  $m$  个输出变量直接代替,故通过式(5-55)所示线性变换将  $n$  维状态向量按可检测性分解为  $\bar{\mathbf{x}}_{\text{I}}$  和  $\bar{\mathbf{x}}_{\text{II}}$  两部分,其中,  $\bar{\mathbf{x}}_{\text{I}}$  为  $\bar{\mathbf{x}}$  中前  $(n-m)$  个状态分量,  $\bar{\mathbf{x}}_{\text{I}}$  需要重构;  $\bar{\mathbf{x}}_{\text{II}}$  为  $\bar{\mathbf{x}}$  中后  $m$  个状态分量,  $\bar{\mathbf{x}}_{\text{II}}$  可由输出  $\mathbf{y}$  直接检测取得。按  $\bar{\mathbf{x}}_{\text{I}}$  和  $\bar{\mathbf{x}}_{\text{II}}$  分块,  $\bar{\Sigma}_o(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}})$  的动态方程式(5-56a)可重新写成式(5-56b)所示的分块形式,即

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{\text{I}} \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{\text{II}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_{\text{I}} \\ \bar{\mathbf{x}}_{\text{II}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix} u \\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_{\text{I}} \\ \bar{\mathbf{x}}_{\text{II}} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{x}}_{\text{II}} \end{cases} \quad (5-56b)$$

式中,  $\bar{\mathbf{A}}_{11}, \bar{\mathbf{A}}_{12}, \bar{\mathbf{A}}_{21}, \bar{\mathbf{A}}_{22}$  分别为  $(n-m) \times (n-m), (n-m) \times m, m \times (n-m), m \times m$  维矩阵;  $\bar{\mathbf{B}}_1, \bar{\mathbf{B}}_2$  分别为  $(n-m) \times r, m \times r$  维矩阵。

式(5-56b)表明,  $\bar{\Sigma}_0(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}})$  可按状态变量是否需要重构分解为两个子系统, 即不需要重构状态的  $m$  维子系统  $\bar{\Sigma}_{\parallel}$  和需要重构状态的  $(n-m)$  维子系统  $\bar{\Sigma}_{\perp}$ 。将式(5-56b)展开, 并根据  $\mathbf{y} = \bar{\mathbf{x}}_{\parallel}$ , 得

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{\perp} = \bar{\mathbf{A}}_{11} \bar{\mathbf{x}}_{\perp} + \bar{\mathbf{A}}_{12} \mathbf{y} + \bar{\mathbf{B}}_1 \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{A}}_{21} \bar{\mathbf{x}}_{\perp} + \bar{\mathbf{A}}_{22} \mathbf{y} + \bar{\mathbf{B}}_2 \mathbf{u} \end{cases} \quad (5-57)$$

$$\text{令} \quad \mathbf{z} = \dot{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{A}}_{22} \mathbf{y} - \bar{\mathbf{B}}_2 \mathbf{u} \quad (5-58)$$

代入式(5-57), 得待观测子系统  $\bar{\Sigma}_{\perp}$  的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{\perp} = \bar{\mathbf{A}}_{11} \bar{\mathbf{x}}_{\perp} + \bar{\mathbf{A}}_{12} \mathbf{y} + \bar{\mathbf{B}}_1 \mathbf{u} \\ \mathbf{z} = \bar{\mathbf{A}}_{21} \bar{\mathbf{x}}_{\perp} \end{cases} \quad (5-59)$$

因为式(5-59)中  $\mathbf{u}$  为已知及  $\mathbf{y}$  可检测得出, 故  $\bar{\mathbf{A}}_{12} \mathbf{y} + \bar{\mathbf{B}}_1 \mathbf{u}$  可看做子系统  $\bar{\Sigma}_{\perp}$  中已知的输入项, 而  $\mathbf{z} = \dot{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{A}}_{22} \mathbf{y} - \bar{\mathbf{B}}_2 \mathbf{u}$  则可看做子系统  $\bar{\Sigma}_{\perp}$  已知的输出向量,  $\bar{\mathbf{A}}_{11}$  为  $\bar{\Sigma}_{\perp}$  的系统矩阵, 而  $\bar{\mathbf{A}}_{21}$  则相当于  $\bar{\Sigma}_{\perp}$  的输出矩阵。

由系统  $\Sigma_0(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  能观, 易证明子系统  $\bar{\Sigma}_{\perp}$  能观, 即  $(\bar{\mathbf{A}}_{11}, \bar{\mathbf{A}}_{21})$  为能观测对, 故可仿照全维观测器设计方法, 对  $(n-m)$  维子系统  $\bar{\Sigma}_{\perp}$  设计  $(n-m)$  维观测器重构  $\bar{\mathbf{x}}_{\perp}$ 。参照全维观测器的状态方程式(5-39), 对式(5-59)所示子系统  $\bar{\Sigma}_{\perp}$  列写关于状态估值  $\hat{\bar{\mathbf{x}}}_{\perp}$  的状态方程, 且将子系统  $\bar{\Sigma}_{\perp}$  的输出  $\mathbf{z}$  用式(5-58)代入, 得

$$\dot{\hat{\bar{\mathbf{x}}}}_{\perp} = (\bar{\mathbf{A}}_{11} - \bar{\mathbf{G}}_1 \bar{\mathbf{A}}_{21}) \hat{\bar{\mathbf{x}}}_{\perp} + \bar{\mathbf{G}}_1 (\dot{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{A}}_{22} \mathbf{y} - \bar{\mathbf{B}}_2 \mathbf{u}) + \bar{\mathbf{A}}_{12} \mathbf{y} + \bar{\mathbf{B}}_1 \mathbf{u} \quad (5-60)$$

式中, 反馈矩阵  $\bar{\mathbf{G}}_1$  为  $(n-m) \times m$  维矩阵, 根据定理 5-8, 通过适当选择  $\bar{\mathbf{G}}_1$  可任意配置系统矩阵  $(\bar{\mathbf{A}}_{11} - \bar{\mathbf{G}}_1 \bar{\mathbf{A}}_{21})$  的特征值。但式(5-60)中含有系统输出的导数  $\dot{\mathbf{y}}$ , 这是不希望的。为了消去式(5-60)中的  $\dot{\mathbf{y}}$ , 将变换

$$\mathbf{w} = \hat{\bar{\mathbf{x}}}_{\perp} - \bar{\mathbf{G}}_1 \mathbf{y} \quad (5-61)$$

代入式(5-60)并整理, 得降维观测器方程为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{w}} = (\bar{\mathbf{A}}_{11} - \bar{\mathbf{G}}_1 \bar{\mathbf{A}}_{21}) (\mathbf{w} + \bar{\mathbf{G}}_1 \mathbf{y}) + (\bar{\mathbf{A}}_{12} - \bar{\mathbf{G}}_1 \bar{\mathbf{A}}_{22}) \mathbf{y} + (\bar{\mathbf{B}}_1 - \bar{\mathbf{G}}_1 \bar{\mathbf{B}}_2) \mathbf{u} \\ \quad = (\bar{\mathbf{A}}_{11} - \bar{\mathbf{G}}_1 \bar{\mathbf{A}}_{21}) \mathbf{w} + (\bar{\mathbf{B}}_1 - \bar{\mathbf{G}}_1 \bar{\mathbf{B}}_2) \mathbf{u} + [(\bar{\mathbf{A}}_{11} - \bar{\mathbf{G}}_1 \bar{\mathbf{A}}_{21}) \bar{\mathbf{G}}_1 + \bar{\mathbf{A}}_{12} - \bar{\mathbf{G}}_1 \bar{\mathbf{A}}_{22}] \mathbf{y} \\ \hat{\bar{\mathbf{x}}}_{\perp} = \mathbf{w} + \bar{\mathbf{G}}_1 \mathbf{y} \end{cases} \quad (5-62)$$

根据式(5-62)不需要获得系统输出的导数  $\dot{\mathbf{y}}$  即可构建  $(n-m)$  维状态观测器实现  $\bar{\mathbf{x}}_{\perp}$  的重构。由式(5-62)及待观测子系统  $\bar{\Sigma}_{\perp}$  的状态方程式, 可得降维观测器状态估值误差微分方程为

$$(\dot{\bar{\mathbf{x}}}_{\perp} - \dot{\hat{\bar{\mathbf{x}}}}_{\perp}) = (\bar{\mathbf{A}}_{11} - \bar{\mathbf{G}}_1 \bar{\mathbf{A}}_{21}) (\bar{\mathbf{x}}_{\perp} - \hat{\bar{\mathbf{x}}}_{\perp}) \quad (5-63)$$

由于  $(\bar{\mathbf{A}}_{11}, \bar{\mathbf{A}}_{21})$  为能观测对, 故必能通过选择反馈矩阵  $\bar{\mathbf{G}}_1$  使降维观测器系统矩阵  $(\bar{\mathbf{A}}_{11} - \bar{\mathbf{G}}_1 \bar{\mathbf{A}}_{21})$  具有任意所期望的特征值, 从而保证状态  $\bar{\mathbf{x}}_{\perp}$  的估值误差以期望的收敛速率趋于零。

结合  $\bar{x}_{\text{II}} = y$ , 整个状态向量  $\bar{x}$  的估值可表示为

$$\hat{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\bar{x}}_{\text{I}} \\ \bar{x}_{\text{II}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w + \bar{G}_1 y \\ y \end{bmatrix} \quad (5-64)$$

由式(5-55), 原系统  $\Sigma(A, B, C)$  的状态向量  $x$  的估值  $\hat{x}$  为

$$\hat{x} = T^{-1} \hat{\bar{x}} = \begin{bmatrix} Q_{n-m} & Q_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\bar{x}}_{\text{I}} \\ \bar{x}_{\text{II}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{n-m} & Q_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w + \bar{G}_1 y \\ y \end{bmatrix} \quad (5-65)$$

根据式(5-62)及式(5-65)可得降维观测器(Luenberger 观测器)结构图, 如图 5-8 所示。

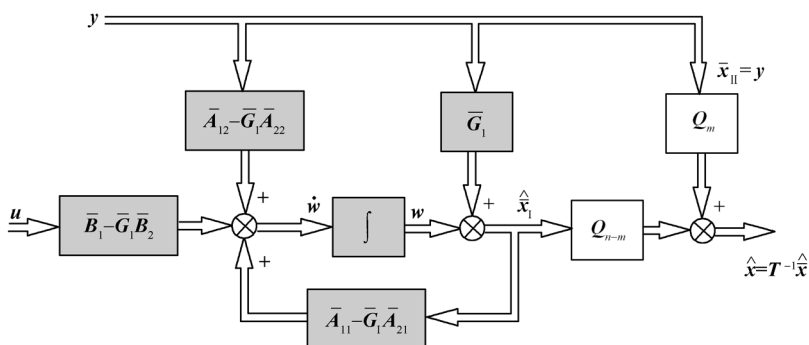


图 5-8 降维观测器(Luenberger 观测器)结构图

应该指出, 当输出量的测量中有噪声干扰时, 降维观测器通过常数阵  $Q_m$  将其直接传递给观测器的输出(见图 5-8), 而全维观测器则将其经积分后即高频滤波后才传输至观测器的输出。因此, 尽管降维观测器具有结构较简单、计算量较小的优点, 但当输出量的测量中有严重的噪声干扰时, 最好使用全维观测器。

**【例 5-5】** 设系统  $\Sigma(A, B, C)$  的状态空间表达式为 
$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -7 & 0 & -8 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u, \\ y = [1 \quad 0 \quad 1]x \end{cases}$$
 试设计

极点为  $-4, -4$  的降维状态观测器。

**解** (1) 检验系统  $\Sigma(A, B, C)$  的能观性

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 5 \\ 18 & 5 & 17 \end{bmatrix} = 3 = n$$

故系统能观。又  $m = \text{rank} C = 1$ , 故可构造  $n - m = 2$  维降维观测器。

(2) 作线性变换, 使状态向量按可检测性分解

根据式(5-52), 构造  $n \times n$  非奇异矩阵  $T$  为:  $T = \begin{bmatrix} T_{n-m} \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 则

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

作线性变换  $\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1} \bar{\mathbf{x}}$ , 则将  $\Sigma_0(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  变换为  $\bar{\Sigma}_0(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}})$ , 即

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1} \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{T} \mathbf{B} u = \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}} u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \mathbf{C} \mathbf{T}^{-1} \bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{x}} = [0 \quad 0 \quad 1] \bar{\mathbf{x}} \end{cases}$$

由于  $\bar{\mathbf{x}}_{\parallel} = \bar{x}_3 = y$ , 故只需设计二维观测器重构  $\bar{\mathbf{x}}_{\perp} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$ 。将  $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}$  分块, 得

$$\bar{\mathbf{A}}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{A}}_{12} = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{A}}_{21} = [0 \quad 1], \bar{\mathbf{A}}_{22} = 5, \bar{\mathbf{B}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{B}}_2 = 0$$

(3) 求降维观测器的  $(n-m) \times m$  维反馈矩阵  $\bar{\mathbf{G}}_1 = \begin{bmatrix} \bar{g}_1 \\ \bar{g}_2 \end{bmatrix}$

由降维观测器特征多项式

$$f(\lambda) = \det[\lambda \mathbf{I} - (\bar{\mathbf{A}}_{11} - \bar{\mathbf{G}}_1 \bar{\mathbf{A}}_{21})] = \det \begin{bmatrix} \lambda & \bar{g}_1 \\ -1 & \lambda + \bar{g}_2 \end{bmatrix} = \lambda^2 + \bar{g}_2 \lambda + \bar{g}_1$$

及期望特征多项式

$$f^*(\lambda) = (\lambda + 4)(\lambda + 4) = \lambda^2 + 8\lambda + 16$$

比较  $f(\lambda)$  与  $f^*(\lambda)$  各相应项系数, 联立方程并解之, 得

$$\bar{\mathbf{G}}_1 = \begin{bmatrix} \bar{g}_1 \\ \bar{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 8 \end{bmatrix}$$

(4) 根据式(5-62), 列写在线性变换后状态空间中的降维观测器状态方程

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{w}}} = (\bar{\mathbf{A}}_{11} - \bar{\mathbf{G}}_1 \bar{\mathbf{A}}_{21}) \bar{\mathbf{w}} + (\bar{\mathbf{B}}_1 - \bar{\mathbf{G}}_1 \bar{\mathbf{B}}_2) u + [(\bar{\mathbf{A}}_{11} - \bar{\mathbf{G}}_1 \bar{\mathbf{A}}_{21}) \bar{\mathbf{G}}_1 + \bar{\mathbf{A}}_{12} - \bar{\mathbf{G}}_1 \bar{\mathbf{A}}_{22}] y \\ \quad = \begin{bmatrix} 0 & -16 \\ 1 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -204 \\ -96 \end{bmatrix} y \\ \hat{\bar{\mathbf{x}}}_{\perp} = \begin{bmatrix} \hat{\bar{x}}_1 \\ \hat{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{w}} + \bar{\mathbf{G}}_1 y = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 \\ 8 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} w_1 + 16y \\ w_2 + 8y \end{bmatrix} \end{cases}$$

则  $\bar{\Sigma}_0(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}})$  所对应状态向量  $\bar{\mathbf{x}}$  的估值为

$$\hat{\bar{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \hat{\bar{x}}_1 \\ \hat{\bar{x}}_2 \\ \hat{\bar{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\bar{x}}_1 \\ \hat{\bar{x}}_2 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 + 16y \\ w_2 + 8y \\ y \end{bmatrix}$$

(5) 将  $\hat{\bar{\mathbf{x}}}$  变换为原系统状态空间, 得到原系统  $\Sigma_0(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  的状态重构为

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^{-1} \hat{\bar{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 + 16y \\ w_2 + 8y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 + 16y \\ w_2 + 8y \\ -w_1 - 15y \end{bmatrix}$$

由降维观测器状态方程可画出其结构图, 如图 5-9 所示。

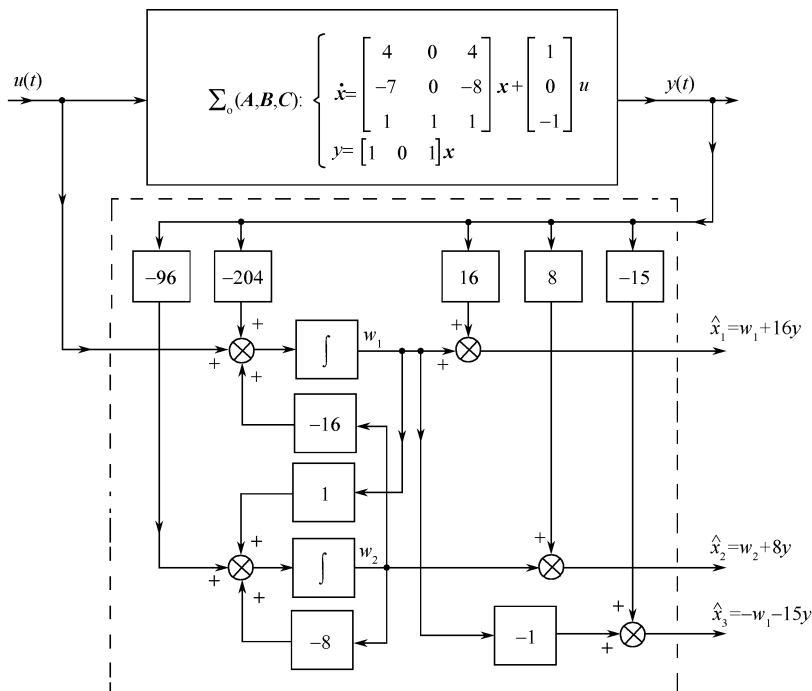


图 5-9 例 5-5 图

## 5.6 采用状态观测器的状态反馈系统

设计状态观测器的目的是提供状态估值  $\hat{x}$  以代替真实状态  $x$  来实现全状态反馈,构成闭环控制系统。带有全维状态观测器的状态反馈系统如图 5-10 所示。设能控且能观的被控系统  $\Sigma_o(A, B, C)$  的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (5-66)$$

渐近状态观测器的状态方程为

$$\dot{\hat{x}} = (A - GC)\hat{x} + Gy + Bu \quad (5-67)$$

利用观测器的状态估值  $\hat{x}$  所实现的状态反馈控制律为

$$u = v - F\hat{x} \quad (5-68)$$

将式(5-68)代入式(5-66)、式(5-67),得整个闭环系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - BF\hat{x} + Bv \\ \dot{\hat{x}} = (A - GC - BF)\hat{x} + GCx + Bv \\ y = Cx \end{cases} \quad (5-69)$$

式(5-69)写成矩阵形式,即

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BF \\ GC & A - GC - BF \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} v \\ y = [C \ 0] \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5-70)$$

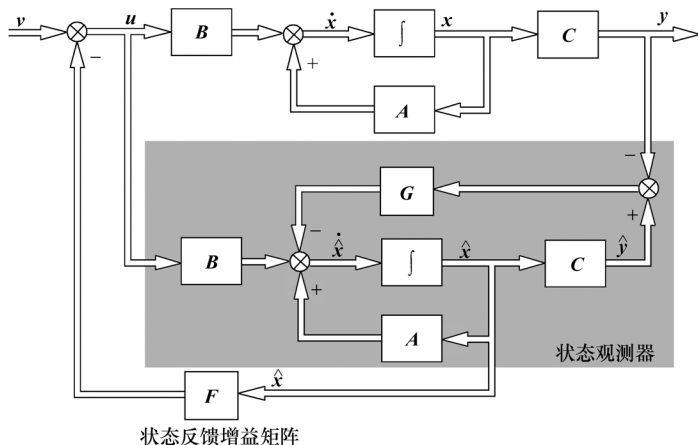


图 5-10 带有渐近状态观测器的状态反馈系统

这是一个  $2n$  维的复合系统。为便于研究复合系统的基本特性,对式(5-70)进行线性非奇异变换

$$\begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x - \hat{x} \end{bmatrix} \quad (5-71)$$

则  $2n$  维复合系统的状态空间表达式变换为按能控性分解的形式,即

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x} - \hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BF & BF \\ 0 & A - GC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x - \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v \\ y = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ x - \hat{x} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5-72)$$

式(5-72)表明,带渐近状态观测器的状态反馈闭环系统不完全能控,状态观测误差  $(x - \hat{x})$  是不能控的,控制信号不会影响状态重构误差的特性,只要将矩阵  $A - GC$  的特征值均配置在复平面的左半开平面的适当位置,观测误差总能以期望的收敛速率趋于零,即有  $\lim_{t \rightarrow \infty} (x - \hat{x}) = 0$ ,这正是渐近观测器的重要性质,因此当  $t \rightarrow \infty$  时,必有

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BF)x + Bv \\ y = Cx \end{cases}$$

成立。可见,带观测器的状态反馈系统只有当  $t \rightarrow \infty$  进入稳态时,才会与直接状态反馈系统完全等价。应通过设计输出偏差反馈增益矩阵  $G$  来合理配置观测器的极点,以使  $(x - \hat{x}) \rightarrow 0$  的速度足够快。

由于传递函数矩阵在线性非奇异变换下保持不变,因此可据式(5-72)求  $2n$  维复合系统的传递函数矩阵为

$$W_{FG}(s) = [C \quad 0] \begin{bmatrix} sI_n - A + BF & -BF \\ 0 & sI_n - A + GC \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} = C(sI_n - A + BF)^{-1} B = W_F(s)$$

上式表明, $2n$  维复合系统的传递函数矩阵等于直接状态反馈闭环系统的传递函数矩阵,即观测器的引入不改变直接状态反馈控制系统  $\Sigma_F$  的传递函数矩阵。

由于线性变换也不改变系统的特征值,根据式(5-72)可得  $2n$  维复合系统的特征多项式为

$$\begin{vmatrix} sI_n - (A - BF) & -BF \\ 0 & sI_n - (A - GC) \end{vmatrix} = |sI_n - (A - BF)| \cdot |sI_n - (A - GC)| \quad (5-73)$$

式(5-73)表明,由观测器构成状态反馈的  $2n$  维复合系统,其特征多项式等于矩阵  $A - BF$  的特征多项式  $|sI_n - (A - BF)|$  与矩阵  $A - GC$  的特征多项式  $|sI_n - (A - GC)|$  的乘积。即  $2n$  维复



合系统的  $2n$  个特征值由相互独立的两部分组成:一部分为直接状态反馈系统的系统矩阵  $\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{F}$  的  $n$  个特征值;另一部分为状态观测器的系统矩阵  $\mathbf{A}-\mathbf{G}\mathbf{C}$  的  $n$  个特征值。复合系统特征值的这种性质称为分离特性。基于复合系统特征值的分离性,只要被控系统  $\Sigma_0(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C})$  能控能观,则用状态观测器估计值形成状态反馈时,可对  $\Sigma_0(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C})$  的状态反馈控制器及状态观测器分别按各自的要求进行独立设计,即先按闭环控制系统的动态要求确定  $\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{F}$  的特征值,从而设计出状态反馈增益矩阵  $\mathbf{F}$ ;再按状态观测误差趋于零的收敛速率要求确定  $\mathbf{A}-\mathbf{G}\mathbf{C}$  的特征值,从而设计出输出偏差反馈增益矩阵  $\mathbf{G}$ ;最后,将两部分独立设计的结果联合起来,合并为带状态观测器的状态反馈系统。应该指出,对采用降维观测器构成的状态反馈系统,其特征值也具有分离特性,因此,其状态反馈控制器及降维状态观测器的设计也是相互独立的。

具体设计控制系统时,观测器极点的选取通常使状态观测误差趋于零的收敛速率较系统的响应快得多,以保证观测器的引入不致影响全状态反馈控制的性能。但观测器的响应速度太快会出现放大量测噪声,使系统无法正常工作。因此,观测器期望极点的选择应从工程实际出发,兼顾快速性、抗干扰性等折中考虑,通常选择观测器的响应速度比所考虑的状态反馈闭环系统快  $2\sim 5$  倍。

**【例 5-6】** 被控系统  $\Sigma_0(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C})$  的状态空间表达式为 
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 1] \mathbf{x} \end{cases}$$

为  $-3, -3$  的全维状态观测器,构成状态反馈系统,使闭环极点配置为  $-1+j$  和  $-1-j$ 。

**解** 由例 5-2 及例 5-4 知,此被控系统  $\Sigma_0(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C})$  能控能观,根据分离特性可分别独立设计状态反馈增益矩阵  $\mathbf{F}$  和观测器偏差反馈增益矩阵  $\mathbf{G}$ 。

例 5-2 中,已求出此被控系统采用直接状态反馈使闭环极点配置为  $-1+j$  和  $-1-j$  所需的  $\mathbf{F} = [f_1 \quad f_2] = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & 2 \end{bmatrix}$ , 其即为本题所设计的状态反馈增益矩阵  $\mathbf{F}$ 。

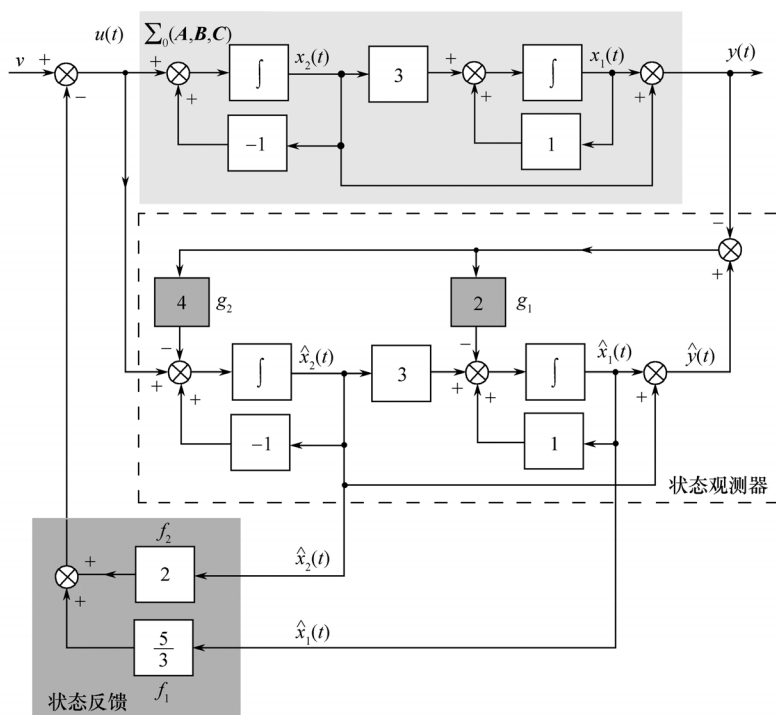


图 5-11 例 5-6 图

而在例 5-4 中已求出此被控系统无状态反馈时,使观测器极点配置为  $-3, -3$  所需的

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \text{ 其即为本题所设计的观测器偏差反馈增益矩阵 } \mathbf{G}.$$

故设计好的闭环系统状态变量图如图 5-11 所示。

**【例 5-7】** 设被控制系统的传递函数为  $G_o(s) = \frac{1}{s(s+6)}$ , 且假设系统输出量可以准确测量, 试设计降维观测器, 构成状态反馈系统, 使闭环极点配置为  $-6 \pm 6j$ 。

**解** 因被控制系统的传递函数不存在零、极点对消, 故其能控能观。又根据分离特性, 状态反馈控制与状态观测器可分别独立设计。

为便于设计观测器, 被控系统按能观标准型实现, 即有

$$\Sigma_o(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}): \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \quad 1] \mathbf{x} \end{cases}$$

(1) 根据闭环极点配置要求设计状态反馈增益阵  $\mathbf{F}$

令  $\mathbf{F} = [f_1 \quad f_2]$ , 则  $(\mathbf{A} - \mathbf{BF})$  特征多项式为

$$p_F(s) = \det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BF})] = \begin{vmatrix} s+f_1 & f_2 \\ -1 & s+6 \end{vmatrix} = s^2 + (6+f_1)s + (6f_1+f_2)$$

与期望特征多项式

$$p_F^*(s) = (s+6+6j)(s+6-6j) = s^2 + 12s + 72$$

比较得

$$\mathbf{F} = [f_1 \quad f_2] = [6 \quad 36]$$

(2) 设计降维观测器

$\Sigma_o(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  为能观标准型, 有  $x_2 = y$ , 又输出量  $y$  可准确测量, 故只需设计一维观测器重构  $x_1$ , 对应的降维观测器状态方程为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{w}} = (\bar{\mathbf{A}}_{11} - \bar{\mathbf{G}}_1 \bar{\mathbf{A}}_{21}) \mathbf{w} + (\bar{\mathbf{B}}_1 - \bar{\mathbf{G}}_1 \bar{\mathbf{B}}_2) u + [(\bar{\mathbf{A}}_{11} - \bar{\mathbf{G}}_1 \bar{\mathbf{A}}_{21}) \bar{\mathbf{G}}_1 + \bar{\mathbf{A}}_{12} - \bar{\mathbf{G}}_1 \bar{\mathbf{A}}_{22}] y \\ \hat{x}_1 = \mathbf{w} + \bar{\mathbf{G}}_1 y \end{cases}$$

式中,  $\bar{\mathbf{G}}_1 = g_1, \bar{\mathbf{A}}_{11} = 0, \bar{\mathbf{A}}_{12} = 0, \bar{\mathbf{A}}_{21} = 1, \bar{\mathbf{A}}_{22} = -6, \bar{\mathbf{B}}_1 = 1, \bar{\mathbf{B}}_2 = 0$ 。

基于通常选择观测器的响应速度比所考虑的状态反馈闭环系统快 2~5 倍这一经验规则, 本例取观测器期望极点为

$$\lambda^* = 2.5 \times (-6) = -15$$

则降维观测器特征多项式

$$f(\lambda) = \det[\lambda \mathbf{I} - (\bar{\mathbf{A}}_{11} - \bar{\mathbf{G}}_1 \bar{\mathbf{A}}_{21})] = \lambda - (0 - g_1) = \lambda + g_1$$

与期望特征多项式

$$f^*(\lambda) = \lambda + 15$$

比较得

$$\bar{\mathbf{G}}_1 = g_1 = 15$$

则降维观测器状态方程为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{w}} = -15\mathbf{w} + u + [(-15 \times 15 + 15 \times 6)] y = -15\mathbf{w} - 135y + u \\ \hat{x}_1 = \mathbf{w} + 15y \end{cases}$$

又  $x_2 = y$ , 则  $\Sigma_o(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  所对应状态向量  $\mathbf{x}$  的估值为

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau\omega + 15y \\ y \end{bmatrix}$$

(3) 将两部分独立设计的结果联合起来,得带降维观测器的状态反馈系统结构,如图 5-12 所示。

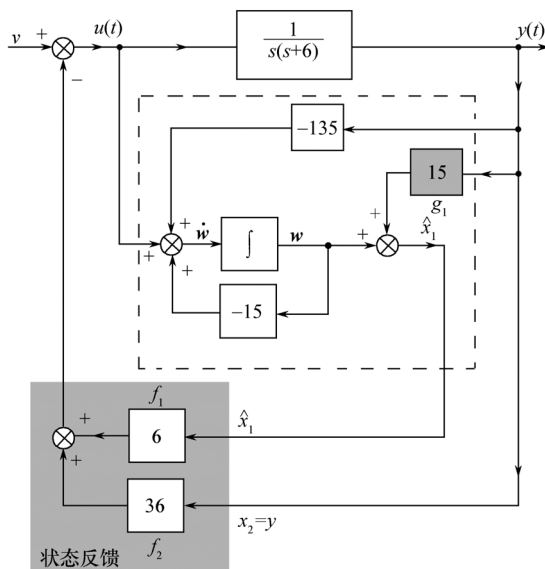


图 5-12 例 5-7 图

## 5.7 解耦控制

设多变量线性定常系统  $\Sigma_o(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  的输入向量维数与输出向量维数相等,其状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (5-74)$$

式中,  $\mathbf{u}, \mathbf{y}$  均为  $m$  维列向量;  $\mathbf{x}$  为  $n$  维列向量;  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  分别为  $n \times n, n \times m, m \times n$  维实数矩阵,且设  $m \leq n$ 。与式(5-74)对应的传递函数阵为

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1m}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdots & G_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{m1}(s) & G_{m2}(s) & \cdots & G_{mm}(s) \end{bmatrix} \quad (5-75)$$

式中,  $\mathbf{G}(s)$  为  $m$  阶严格真有理函数方阵;  $G_{ij}(s)$  为  $\mathbf{G}(s)$  的第  $i$  行第  $j$  列元素,表示第  $i$  个输出量与第  $j$  个输入量之间的传递函数。若系统初始状态为零,则其输入/输出关系为

$$\begin{cases} y_1(s) = G_{11}(s)u_1(s) + G_{12}(s)u_2(s) + \cdots + G_{1m}(s)u_m(s) \\ y_2(s) = G_{21}(s)u_1(s) + G_{22}(s)u_2(s) + \cdots + G_{2m}(s)u_m(s) \\ \vdots \\ y_m(s) = G_{m1}(s)u_1(s) + G_{m2}(s)u_2(s) + \cdots + G_{mm}(s)u_m(s) \end{cases} \quad (5-76)$$

由式(5-76)可知,一般情况下,多变量系统的每一输入分量对多个(或所有)输出分量均有控制作用,即每一输出分量受多个(或所有)输入分量的控制。这种第  $j$  个输入量控制第  $i$  个输出量( $i \neq j$ )的

关系称为输入/输出间的耦合作用,这种耦合使多变量系统的控制通常十分困难,例如,就难以找到合适的输入量,达到控制某一输出分量而不影响其他输出分量的要求。因此,有必要引入合适的控制律,使输入/输出相互关联的多变量系统实现解耦,即实现每个输出分量仅受一个对应输入分量控制,每个输入分量也仅能控制对应的一个输出分量。(输入量、输出量)解耦后的多变量系统化成  $m$  个独立的单输入单输出子系统,从而使系统的分析及进一步控制变得简单,因此,(输入量、输出量)解耦控制是多变量线性定常系统综合理论的重要组成部分,其在多变量系统设计中具有很大的实用价值。显然,解耦系统的传递函数矩阵必为对角线形的非奇异矩阵,由此解耦系统的定义出发,使多变量系统实现解耦的基本思路是通过引入控制装置使系统传递函数矩阵对角化,而具体实现方法主要有前馈补偿器解耦、输入变换与状态反馈相结合解耦等。

### 5.7.1 前馈补偿器解耦

采用前馈补偿器实现解耦的方法如图 5-13 所示,在待解耦系统前串联一个前馈补偿器,使串联后总的传递函数阵成为对角形的有理函数矩阵。

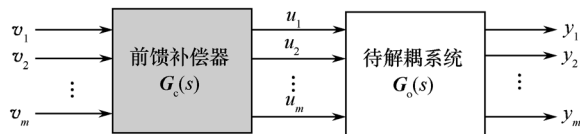


图 5-13 前馈补偿器实现解耦

图 5-13 中,待解耦系统和前馈补偿器的传递函数矩阵分别为  $G_o(s)$  和  $G_c(s)$ ,则串接补偿器后整个系统的总传递函数矩阵为

$$\Phi(s) = G_o(s)G_c(s) \quad (5-77)$$

$$\text{令} \quad \Phi(s) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(s) & & & \\ & \Phi_{22}(s) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Phi_{mm}(s) \end{bmatrix} \quad (5-78)$$

显然,只要待解耦系统传递函数矩阵  $G_o(s)$  满秩,即  $G_o(s)$  的逆  $G_o^{-1}(s)$  存在,则可采用如式(5-79)所示的前馈补偿器使系统获得解耦,即

$$G_c(s) = G_o^{-1}(s)\Phi(s) \quad (5-79)$$

式中,  $\Phi(s)$  为串接补偿器后解耦系统的对角形传递函数矩阵,其主对角线元素  $\Phi_{ii}(s)$  决定了解耦后各独立子系统的特性。

串接前馈补偿器解耦的原理虽然简单,但其增加了系统的维数,且其实现受到  $G_o^{-1}(s)$  是否存在及  $G_c(s)$  物理上是否可实现的限制。

### 5.7.2 输入变换与状态反馈相结合实现解耦控制

采用输入变换与状态反馈相结合方式以实现闭环输入/输出间解耦控制的系统结构如图 5-14 所示。

图 5-14 中,待解耦系统  $\Sigma_o(A, B, C)$  状态空间表达式及传递函数矩阵分别如式(5-74)及式(5-75)所示;状态反馈增益矩阵  $F$  为  $m \times n$  维实常数阵;输入变换阵  $K$  为  $m \times m$  维实常数非奇异阵;  $v$  为  $m$  维参考输入信号列向量。由图 5-14 可见,为实现闭环解耦控制,对  $\Sigma_o(A, B, C)$  采用的控制律为

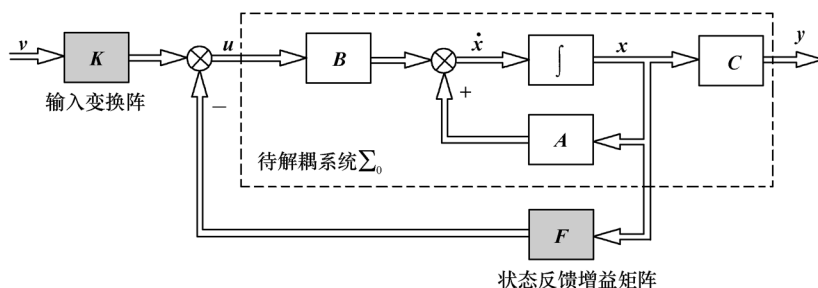


图 5-14 采用输入变换与状态反馈相结合实现解耦

$$u = Kv - Fx \quad (5-80)$$

将式(5-80)代入式(5-74),得图 5-14 所示闭环系统  $\Sigma_{FK}$  的状态空间表达式及传递函数矩阵,即

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BF)x + BKv \\ y = Cx \end{cases} \quad (5-81)$$

$$G_{FK}(s) = C[sI - (A - BF)]^{-1}BK \quad (5-82)$$

因此,待解耦系统  $\Sigma_0(A, B, C)$  采用式(5-80)所示控制律实现闭环解耦问题在频域中可简单描述如下:寻找适当的状态反馈增益矩阵  $F$  和输入变换阵  $K$ ,使式(5-82)所示的闭环系统  $\Sigma_{FK}$  的传递函数矩阵为对角形矩阵。

为便于说明,  $\Sigma_0(A, B, C)$  状态反馈的可解耦性判据及如何选择  $F$  和  $K$  将其化为积分型解耦系统,先定义  $d_i$  是  $0 \sim (n-1)$  之间满足下式

$$C_i A^{d_i} B \neq 0 \quad (5-83)$$

的最小整数。式中,  $C_i$  为  $\Sigma_0(A, B, C)$  输出矩阵  $C$  的第  $i$  行向量,故相应的  $d_i$  的下标  $i$  表示行数 ( $i=1, 2, \dots, m$ )。若对  $l=0, 1, \dots, n-1$ , 均有  $C_i A^l B = 0$ , 则令  $d_i = n-1$ 。根据  $d_i$ , 再定义  $m \times m$  维可解耦性矩阵为

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} C_1 A^{d_1} B \\ C_2 A^{d_2} B \\ \vdots \\ C_m A^{d_m} B \end{bmatrix} \quad (5-84)$$

**定理 5-9** 系统  $\Sigma_0(A, B, C)$  采用式(5-80)所示输入变换与状态反馈相结合控制律可解耦的充要条件是式(5-84)所示可解耦性矩阵  $\tilde{B}$  非奇异。

**定理 5-10** 当系统  $\Sigma_0(A, B, C)$  可以式(5-80)所示输入变换与状态反馈相结合控制律解耦时,若取输入变换阵  $K$  及状态反馈增益矩阵  $F$  为

$$\left\{ \begin{aligned} K = \tilde{B}^{-1} &= \begin{bmatrix} C_1 A^{d_1} B \\ C_2 A^{d_2} B \\ \vdots \\ C_m A^{d_m} B \end{bmatrix}^{-1} \\ F &= \begin{bmatrix} C_1 A^{d_1} B \\ C_2 A^{d_2} B \\ \vdots \\ C_m A^{d_m} B \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C_1 A^{d_1+1} B \\ C_2 A^{d_2+1} B \\ \vdots \\ C_m A^{d_m+1} B \end{bmatrix} \end{aligned} \right. \quad (5-85)$$

则所得闭环系统 $\Sigma_{\text{FK}}$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BF})\mathbf{x} + \mathbf{BK}\mathbf{v} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (5-86)$$

是积分型解耦系统,其传递函数矩阵为

$$\mathbf{G}_{\text{FK}}(s) = \mathbf{C}[\mathbf{sI} - (\mathbf{A} - \mathbf{BF})]^{-1} \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} s^{-(d_1+1)} & & & \\ & s^{-(d_2+1)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & s^{-(d_m+1)} \end{bmatrix} \quad (5-87)$$

式(5-87)表明,采用式(5-85)实现 $\{\mathbf{F}, \mathbf{K}\}$ 解耦后的系统,由 $m$ 个相互独立的单输入单输出多重积分器 $s^{-(d_i+1)}$ 组成( $i=1, 2, \dots, m$ ),故这种解耦称为积分型解耦。应该指出,因积分型解耦系统的所有极点均为零,故其动态性能不可能满足要求,但其常常是综合性能满意的解耦系统的中间一步。事实上,在积分型解耦系统基础上,可设计附加状态反馈,对闭环解耦系统的极点进行配置,关于这一问题的详细讨论及有关解耦系统极点配置的其他理论可参阅有关文献。

## 5.8 MATLAB 在闭环极点配置及状态观测器设计中的应用

### 5.8.1 用 MATLAB 求解闭环极点配置问题

#### 1. 应用 MATLAB 命令行求解状态反馈增益矩阵

**【例 5-8】** 应用 MATLAB 命令行求解例 5-2 的极点配置问题。

**解** 基于规范算法,采用命令行求解该题的 MATLAB 程序及结果如 MATLAB Program 5\_1:

```
%MATLAB Program 5_1
A=[1 3;0 -1]; B=[0;1];
Qc=ctrb(A,B); %求能控性判别阵
rank_Qc=rank(Qc) %求能控性判别阵的秩
rank_Qc =
    2 %因为 rank $Q_c=2=n$ ,所以被控系统状态完全能控
P_A=poly(A) %求被控系统 $\Sigma_c(A,B,C)$ 的特征多项式系数
P_A =
    1     0    -1
a2=P_A(3);a1=P_A(2);
P_x=poly([-1+j;-1-j]) %求闭环系统期望特征多项式系数
P_x =
    1     2     2
a_x2=P_x(3);a_x1=P_x(2);
Tc=Qc*[a1 1;1 0] %求变换矩阵
F=[a_x2-a2 a_x1-a1]*inv(Tc) %求状态反馈增益矩阵  $F=[f_1 \ f_2]$ 
F =
    1.6667    2.0000 %得  $F=[f_1 \ f_2]=[1.6667 \ 2]$ 
```

## 2. 应用 MATLAB 极点配置函数求解状态反馈增益矩阵

MATLAB 控制系统工具箱中提供了极点配置函数 `place()` 和 `acker()`, 可用于求解状态反馈增益矩阵。其中, 函数 `place()` 可求解多变量系统的极点配置问题, 但该函数不适用于含有多重期望极点的问题; 函数 `acker()` 只适用于设计状态变量数目不多 ( $\leq 10$ ) 的单输入单输出系统, 可以求解配置多重极点的问题, 但该函数不能求解多变量系统的极点配置问题。极点配置函数的调用格式为

$$\mathbf{F} = \text{place}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{P}) \quad (5-88)$$

$$\mathbf{F} = \text{acker}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{P}) \quad (5-89)$$

式(5-88)和式(5-89)中,  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$  分别为被控系统  $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  的系统矩阵、输入矩阵;  $\mathbf{P}$  为由  $n$  个期望闭环极点  $\lambda_i^* (i=1, 2, \dots, n)$  构成的向量;  $\mathbf{F}$  为实现闭环极点配置所需的状态反馈增益矩阵。

采用极点配置函数求解例 5-8 题的程序及求解结果如 MATLAB Program 5\_2:

```
%MATLAB Program 5_2
A=[1 3;0 -1]; B=[0;1];
P=[-1+j;-1-j]; %期望闭环极点构成向量 P
F=place(A,B,P) %求状态反馈增益阵 F, 或 F=acker(A,B,P)
F=
    1.6667    2.0000 %得 F=[f1 f2]=[1.6667 2]
```

## 5.8.2 用 MATLAB 设计状态观测器

单输入单输出系统全维观测器的极点配置设计可应用 MATLAB 命令行进行; 也可基于对偶原理, 应用 MATLAB 控制系统工具箱中的函数 `place()` 和 `acker()` 直接求解。

**【例 5-9】** 应用 MATLAB 极点配置函数求解例 5-4 的全维观测器设计问题。

**解** 求解程序如 MATLAB Program 5\_3:

```
%MATLAB Program 5_3
A=[1 3;0 -1]; C=[1 1];
P=[-3;-3]; %由观测器期望极点构成向量 P
Gt=acker(A',C',P); %求对偶系统Σ。(A',C',B')的状态反馈增益矩阵 Gt
G=Gt' %求系统Σ。(A,B,C)的观测器偏差反馈增益矩阵 G
```

运行 MATLAB Program 5\_3 程序后, 得  $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ , 若再输入如下指令

```
eig(A-G*C)
```

可验证状态观测器极点确被配置到期望位置:  $-3, -3$  处。

## 5.8.3 基于 SIMULINK 的状态反馈系统仿真研究

采用状态观测器的状态反馈系统在基于分离原理分别对状态反馈增益阵和观测器偏差反馈增益阵进行独立设计后, 可在 SIMULINK 中建立系统的仿真模型, 对其动态性能进行仿真分析, 以选出使系统总体性能符合设计要求的状态反馈增益矩阵和观测器偏差反馈增益矩阵。5.9.3 节将给出仿真分析实例。

## 5.9 线性控制系统理论的工程应用举例

线性控制系统理论在工程设计中应用最广泛的是状态空间综合法,即状态反馈与状态观测器理论。

### 5.9.1 稳态精度与跟踪问题

前面内容主要研究的是对单变量被控系统如何通过状态反馈配置其闭环系统极点,保证闭环系统稳定,并使其动态响应的性能指标满足期望的要求,但未讨论系统的稳态精度与跟踪问题。实际上,单输入单输出被控系统 $\Sigma_o(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 的传递函数为 $W_o(s) = \mathbf{C}(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ ,其跟踪单位阶跃参考输入信号的稳态误差为

$$e_{po} = 1 - W_o(0) = 1 - \mathbf{C}(-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

当单输入单输出被控系统 $\Sigma_o(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 仅采用线性状态反馈控制律 $u = v - \mathbf{F}\mathbf{x}$ 时,闭环系统 $\Sigma_F(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 对单位阶跃参考输入信号的跟踪误差为

$$e_{pF} = 1 - \mathbf{C}(-\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F})^{-1}\mathbf{B}$$

式中,状态反馈增益矩阵 $\mathbf{F}$ 为 $n$ 维实数行向量,其由闭环极点配置要求唯一确定,而 $\mathbf{F}$ 一旦确定,跟踪误差随之确定。为了提高系统的稳态精度,基于状态空间综合法的一种简单实现方法是除了按极点配置法确定状态反馈增益矩阵 $\mathbf{F}$ 外,还引入输入变换线性放大器 $K$ ,如图5-15所示。

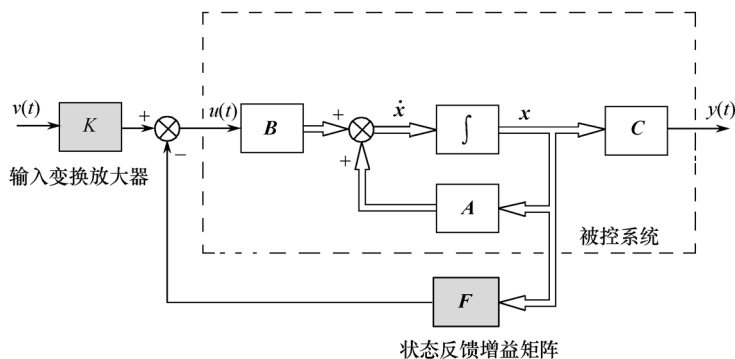


图 5-15 带有输入变换的状态反馈系统

由图5-15可见,单输入单输出被控系统 $\Sigma_o(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 采用输入变换和状态反馈后的闭环系统传递函数为

$$W_{FK}(s) = \mathbf{C}(\mathbf{sI} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{K}$$

对单位阶跃参考输入信号的跟踪误差为

$$e_{pFK} = 1 - \mathbf{C}(-\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{K} \quad (5-90)$$

可通过设置输入变换放大系数 $K$ 进行调整。由式(5-90)可推出选择 $K$ 使系统对阶跃参考输入信号产生零稳态误差的条件为

$$\mathbf{C}(-\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{K} = 1 \quad (5-91)$$

以上讨论未考虑系统的外部扰动。但实际系统的外部干扰作用是难免的,致使系统稳态时不能理想跟踪参考输入而产生稳态误差。由经典控制理论知,单输入单输出系统可采用在系统偏差后面串入积分器作为控制器的一部分来抑制与消除稳态误差,将这一思想应用到多输入多输出系统中,可让 $m$ 维误差向量 $\mathbf{e}$ 的每一分量后面均串入积分器,构造如图5-16所示的状态反



馈加积分器校正的输出反馈系统。

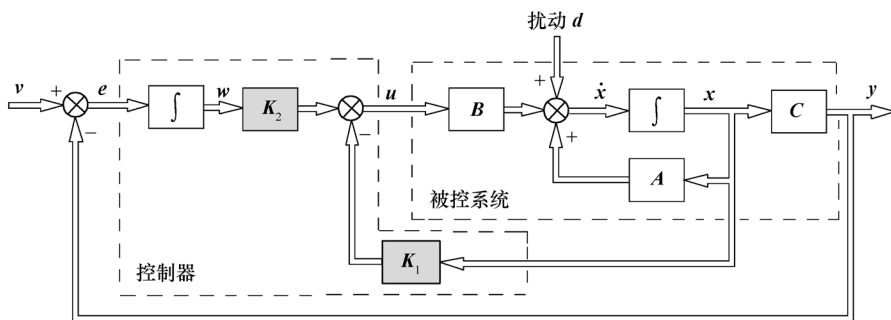


图 5-16 状态反馈加积分器校正的输出反馈系统

图 5-16 中,  $n$  维列向量  $d$  为扰动输入;  $x, u, y$  分别为  $n, r, m$  维列向量;  $A, B, C$  分别为  $n \times n, n \times r, m \times n$  维实数矩阵;  $K_1, K_2$  分别为  $r \times n, r \times m$  维实数矩阵。将  $m$  个积分器生成的  $w$  作为附加状态向量, 与原被控系统可构成被控系统增广的动态方程

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} d \\ v \end{bmatrix} \\ y = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5-92)$$

增广系统的状态线性反馈控制律为

$$u = [-K_1 \quad K_2] \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} = -K_1 x + K_2 w \quad (5-93)$$

式(5-93)中的第一项  $(-K_1 x)$  为被控系统的普通状态负反馈, 第二项  $K_2 w$  是为改善稳态性能而引入的误差的积分信号。应该指出, 只有当式(5-92)所描述的  $n+m$  维增广系统状态完全能控时, 才可采用式(5-93)所示的状态反馈改善系统的动态和稳态性能。容易证明, 增广系统能控的充要条件为原被控系统  $\Sigma(A, B, C)$  能控, 且

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n+m \quad (5-94)$$

显然, 式(5-94)成立的必要条件为系统的控制维数不得少于误差的维数 ( $r \geq m$ ) 且  $\text{rank} C = m$ 。

将式(5-93)代入式(5-92)可得由式(5-92)和式(5-93)组成的状态反馈增广系统(见图 5-16)的动态方程为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK_1 & BK_2 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \\ v \end{bmatrix} \\ y = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5-95)$$

式中,  $K_1$  和  $K_2$  由期望的闭环极点配置决定, 而且只要式(5-92)所示增广系统能控, 则能实现式(5-95)所示闭环系统的系统矩阵特征值的任意配置。可以证明, 只要  $K_1$  和  $K_2$  选得使式(5-95)的特征值均具有负实部, 则图 5-16 所示闭环系统可消除阶跃扰动及阶跃参考输入作用下的稳态误差。

应该指出, 当扰动和(或)参考输入为斜坡信号时, 需引入重积分器, 这时增广系统动态方程随之变化。

### 5.9.2 基于状态空间综合法的单倒立摆控制系统设计实例

设有一单倒立摆(摆杆和其上的摆锤)用铰链安装在由伺服电机驱动的小车上,如图 5-17 所示。这是空间起飞助推器的姿态控制模型,其控制目标是使空间助推器保持在垂直位置。在该例中,仅考虑倒立摆和小车在图 5-17 所示平面内运动的二维问题。倒立摆是不稳定的,若不给小车在水平方向施加适当的控制力  $u$ ,倒立摆就不能保持在垂直位置而会向左或向右倾倒。为简化问题,忽略摆杆质量、伺服电机惯性及摆轴、轮轴、轮与接触面之间的摩擦力及风力,设小车的质量  $M=2\text{kg}$ ,摆锤的质量  $m=0.1\text{kg}$ ,摆杆的长度  $l=0.5\text{m}$ ,控制的目的是尽可能地保持倒立摆垂直且使小车停留在任意给定但可变更的位置上。

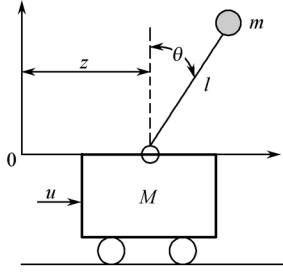


图 5-17 单倒立摆控制系统

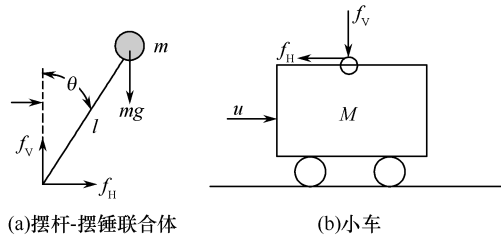


图 5-18 受力图

#### 1. 建立被控系统的数学模型

图 5-17 中,  $\theta$  为摆杆偏离垂线的角度(rad),  $z$  为小车水平方向的瞬时位置坐标, 则摆锤重心的水平、垂直坐标分别为  $(z+l\sin\theta)$ 、 $l\cos\theta$ 。图 5-18 所示为摆杆-摆锤联合体及小车受力图(忽略摩擦力), 其中,  $f_H$ 、 $f_V$  分别为小车通过铰链作用于摆杆的力的水平、垂直分量(见图 5-18(a))及其对应的反作用力(见图 5-18(b))。因忽略摆杆质量, 则摆杆-摆锤联合体的重心近似位于摆锤重心, 且摆杆-摆锤联合体围绕其重心的转动惯量  $J \approx 0$ 。摆杆-摆锤联合体的运动可分解为重心的水平运动、重心的垂直运动及绕重心的转动这 3 个运动, 由牛顿力学定律, 描述这 3 个运动的方程分别为

$$f_H = m \frac{d^2}{dt^2} (z + l\sin\theta) \quad (5-96)$$

$$f_V - mg = m \frac{d^2}{dt^2} (l\cos\theta) \quad (5-97)$$

$$f_V l\sin\theta - f_H l\cos\theta = J \frac{d^2\theta}{dt^2} \approx 0 \quad (5-98)$$

小车的水平运动方程为

$$u - f_H = M \frac{d^2 z}{dt^2} \quad (5-99)$$

将式(5-96)代入式(5-99)得

$$u = M \frac{d^2 z}{dt^2} + m \frac{d^2}{dt^2} (z + l\sin\theta) \quad (5-100)$$

将式(5-96)、式(5-97)代入式(5-98)得

$$\left[ mg + m \frac{d^2}{dt^2} (l\cos\theta) \right] l\sin\theta - \left[ m \frac{d^2}{dt^2} (z + l\sin\theta) \right] l\cos\theta \approx 0 \quad (5-101)$$

式(5-100)及式(5-101)为描述车载倒立摆系统运动的非线性方程, 为简化求解, 需对其作近似线性化处理。当  $\theta$  很小时, 用  $\sin\theta \approx \theta$ ,  $\cos\theta \approx 1$  可将式(5-100)及式(5-101)近似线性化为

$$(M+m)\ddot{z} + ml\ddot{\theta} = u \quad (5-102)$$

$$ml\ddot{z} + ml^2\ddot{\theta} = mgl\theta \quad (5-103)$$

式(5-102)及式(5-103)是在假设  $\theta$  很小的条件下,所建立的描述图 5-17 车载倒立摆系统运动的近似线性模型。由于控制目标含有保持倒立摆垂直的要求,在施加适当水平控制力  $u$  的条件下,假设  $\theta$  很小是合理的。

联立式(5-102)及式(5-103)并消去  $\ddot{z}$  得

$$Ml\ddot{\theta} = (M+m)g\theta - u \quad (5-104)$$

联立式(5-102) 及式(5-103)并消去  $\ddot{\theta}$  得

$$M\ddot{z} = u - mgl\theta \quad (5-105)$$

定义状态变量  $x_1, x_2, x_3, x_4$  为

$$\begin{aligned} x_1 &= z \\ x_2 &= \dot{z} \\ x_3 &= \theta \\ x_4 &= \dot{\theta} \end{aligned}$$

以小车位置  $z$  作为系统输出且由式(5-104)、式(5-105),可列写出图 5-17 车载倒立摆系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml} \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \mathbf{x} \end{cases} \quad (5-106)$$

代入设定的  $M=2\text{kg}, m=0.1\text{kg}, l=0.5\text{m}$  及  $g=9.81\text{m/s}^2$ , 则得

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 20.6 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \mathbf{x} \end{cases} \quad (5-107)$$

## 2. 检查被控系统的结构性质(稳定性、能控性、能观性)

由特征方程  $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^2(s^2 - 103/5) = 0$ , 解得特征值为  $0, 0, \sqrt{103/5}, -\sqrt{103/5}$ , 故被控系统不稳定。由能控性判别阵的秩

$$\text{rank } \mathbf{Q}_c = \text{rank} [\mathbf{B} \ \mathbf{AB} \ \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ \mathbf{A}^3\mathbf{B}] = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -20.6 \\ -1 & 0 & -20.6 & 0 \end{bmatrix} = 4 = n$$

故被控系统状态完全能控, 即当  $\mathbf{x}$  非零时, 总存在将  $\mathbf{x}$  转移至零的控制作用。由能观性判别阵的秩

$$\text{rank } \mathbf{Q}_o = \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \mathbf{CA}^3 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} = 4 = n$$

故被控系统状态完全能观, 即可构建状态观测器对其状态给出估值。

### 3. 反馈控制系统设计

为实现既使倒立摆稳定又控制小车位置的控制任务,采用状态反馈加积分器校正的输出反馈系统,如图 5-19 所示。

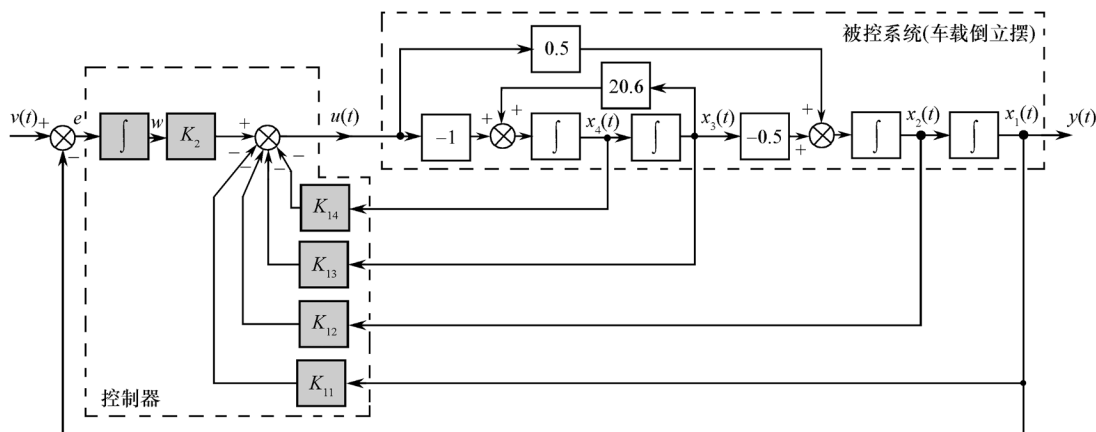


图 5-19 倒立摆的无静差(1 型)位置跟踪系统

因为被控系统  $\Sigma_o(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  能控, 又控制维数  $(r=1)$  不少于误差的维数  $(m=1)$  且  $\text{rank } \mathbf{C} = 1 = m$ , 故满足式(5-94), 即增广系统状态完全能控, 因此, 可采用线性状态反馈控制律

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_1 \mathbf{x} + \mathbf{K}_2 w \quad (5-108)$$

改善系统的动态和稳态性能, 式中,  $\mathbf{K}_1 = [K_{11} \quad K_{12} \quad K_{13} \quad K_{14}]$ 。则由式(5-95), 图 5-19 所示闭环控制系统的特征多项式为

$$p(s) = \det \left| s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK}_1 & \mathbf{BK}_2 \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \right| = s^5 + (0.5K_{12} - K_{14})s^4 + (0.5K_{11} - K_{13} - 20.6)s^3 + (0.5K_2 - 9.8K_{12})s^2 - 9.8K_{11}s - 9.8K_2 \quad (5-109)$$

设期望闭环极点为一对共轭主导极点和 3 个非主导实数极点。应从使所设计的控制系统具有适当的响应速度和阻尼出发选取期望主导极点对, 例如, 若本例希望在小车的阶跃响应中, 调节时间约为 4~5s, 超调量不超过 17%, 据经典控制理论中二阶系统单位阶跃响应性能指标计算公式, 则期望的闭环主导极点对可选为

$$\lambda_{1,2}^* = -1 \pm j\sqrt{3}$$

选择 3 个期望的闭环非主导极点离虚轴为主导极点的 5 倍以上, 取为 -6, 即

$$\lambda_3^* = \lambda_4^* = \lambda_5^* = -6$$

则期望的闭环特征多项式为

$$p^*(s) = (s - \lambda_1^*)(s - \lambda_2^*)(s - \lambda_3^*)(s - \lambda_4^*)(s - \lambda_5^*) = (s + 1 + j\sqrt{3})(s + 1 - j\sqrt{3})(s + 6)^3 = s^5 + 20s^4 + 148s^3 + 504s^2 + 864s + 864 \quad (5-110)$$

令式(5-109)与式(5-110)相等, 并比较等式两边对应项的系数, 联立方程求解得状态反馈增益矩阵和积分增益常数

$$\begin{cases} \mathbf{K}_1 = [K_{11} \quad K_{12} \quad K_{13} \quad K_{14}] = [-88.16 \quad -55.93 \quad -212.68 \quad -47.96] \\ \mathbf{K}_2 = -88.16 \end{cases}$$

### 4. 所设计的反馈控制系统阶跃响应仿真分析

确定了状态反馈增益矩阵  $\mathbf{K}_1$  和积分增益常数  $K_2$ , 由式(5-95), 在未考虑扰动作用时(设  $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ ), 闭环系统对给定输入  $v(t)$  为阶跃信号的响应可通过求解下式获得, 即

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK}_1 & \mathbf{BK}_2 \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} v \\ y = [\mathbf{C} \quad 0] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = x_1 \end{cases} \quad (5-111)$$

式中,  $v(t)=1(t)$ 。MATLAB Program 5\_4 为求解所设计的反馈控制系统阶跃响应的 MATLAB 程序。注意,在程序中用符号 AA、BB、CC、DD 分别表示式(5-111)的系统矩阵、输入矩阵、输出矩阵、传递矩阵,用符号 X 表示由式(5-111)中的  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{w}$  构成的状态向量。图 5-20 所示为  $x_1(t)(=y(t))$ 、 $x_2(t)$ 、 $x_3(t)(=\theta(t))$ 、 $x_4(t)$ 、 $w(t)$  阶跃响应仿真曲线。

```
%MATLAB Program 5_4
A=[0 1 0 0;0 0 -0.5 0;0 0 0 1;0 0 20.6 0];
B=[0;0.5;0;-1];C=[1 0 0 0];
K1=[-88.16 -55.93 -212.68 -47.96];
K2=-88.16;
AA=[A-B*K1 B*K2;-C 0];
BB=[zeros(4,1);1];
CC=[C 0];
DD=0;
t=0:0.01:8;
[y,X,t]=step(AA,BB,CC,DD,1,t);
x1=X(:,1);
x2=X(:,2);
x3=X(:,3);
x4=X(:,4);
w=X(:,5);
subplot(3,2,1)
plot(t,x1,'k'),grid
xlabel('t(sec)'),ylabel('x1 ')
subplot(3,2,2)
plot(t,x2,'k'),grid
xlabel('t(sec)'),ylabel('x2 ')
subplot(3,2,3)
plot(t,x3,'k'),grid
xlabel('t(sec)'),ylabel('x3 ')
subplot(3,2,4)
plot(t,x4,'k'),grid
xlabel('t(sec)'),ylabel('x4 ')
subplot(3,2,5)
plot(t,w,'k'),grid
xlabel('t(sec)'),ylabel('w ')

```

$y(t)=x_1(t)$  的阶跃响应仿真曲线表明  $x_1(\infty)$  趋于给定输入  $v(t)=1(t)$ , 即当给定输入  $v(t)$  为阶跃信号时, 小车的位置  $x_1(t)$  无稳态误差, 而且其动态性能(调节时间及超调量)正如期望, 由此可见, 小车的位置能较好地跟踪慢变的给定输入(如步进信号)。而  $x_2(\infty)=0$ 、 $x_3(\infty)=0$ 、 $x_4(\infty)=0$ 、 $w(\infty)=1$ , 可见, 全状态反馈保证了系统稳定。但图 5-19 采用直接状

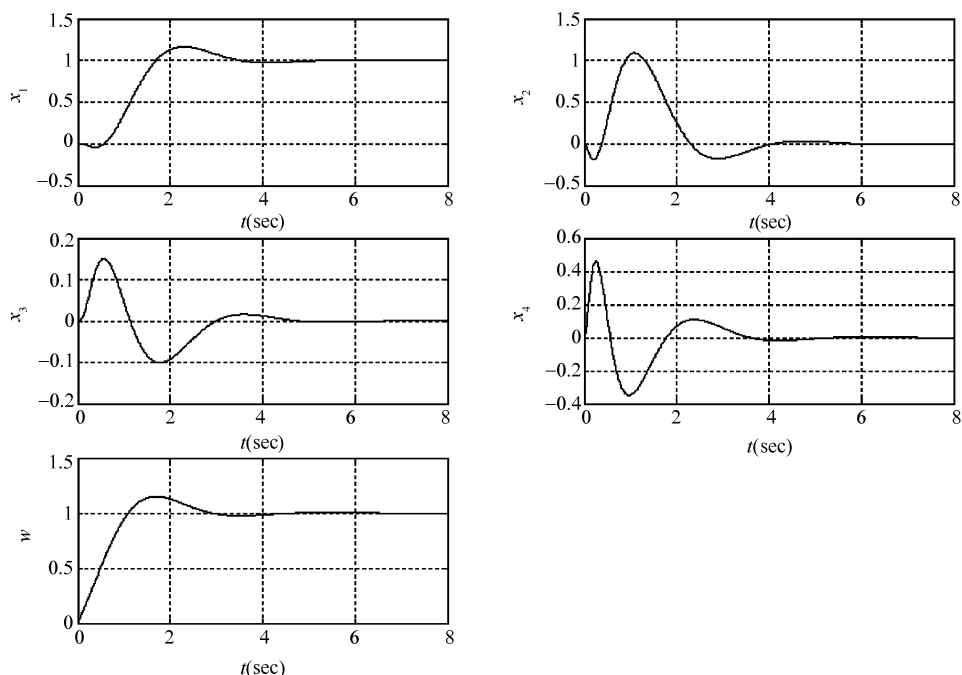


图 5-20  $x_1(t)(=y(t))$ 、 $x_2(t)$ 、 $x_3(t)(=\theta(t))$ 、 $x_4(t)$ 、 $w(t)$  阶跃响应仿真曲线

态反馈,需要设置测量状态变量  $x_1(=z)$ 、 $x_2(=\dot{z})$ 、 $x_3(=\theta)$ 、 $x_4(=\dot{\theta})$  的 4 个传感器。实际上,由于被控系统  $\Sigma_0(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  能观,因此,可构造状态观测器对状态变量进行估计,以实现全状态反馈。关于采用状态观测器实现全状态反馈的单倒立摆无静差位置跟踪系统设计,限于篇幅,本书不再介绍。

### 5.9.3 基于状态空间综合法的直流电动机调速控制系统设计实例

调节电枢供电电压是直流电动机调速系统的主要控制方式,随着电力电子技术的发展,晶闸管可控整流器、脉宽调制变换器成为直流电动机调速系统普遍采用的可控直流电源。图 5-21 为晶闸管可控整流器 VT 供电的直流电动机开环调速系统原理图。

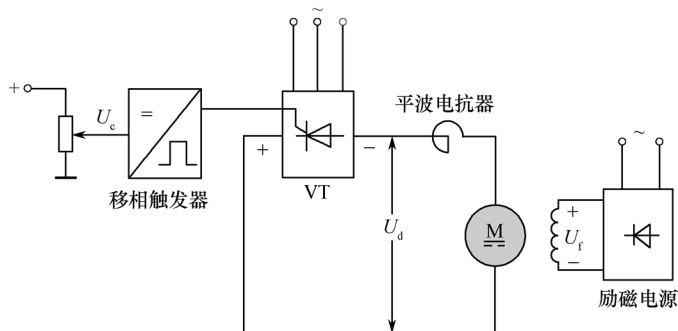


图 5-21 晶闸管-直流电动机开环调速系统原理图

与图 5-21 相对应的晶闸管-直流电动机开环调速系统方块图如图 5-22 所示,图中  $u_c$  为晶闸管整流器的控制电压,  $K_s$  为晶闸管触发和整流器的放大系数,  $T_s$  为晶闸管整流器的失控时间,  $u_d$  为晶闸管整流器输出理想空载电压;  $C_e$ 、 $C_T$  分别为直流电动机的电势常数、转矩常数,  $T_{\text{la}}$  为电动

机电枢回路电磁时间常数,  $R$  为电枢回路总电阻,  $I_d$  为电枢回路电流;  $GD^2$  为电动机轴上的等效飞轮惯量,  $T_L$  为负载转矩。

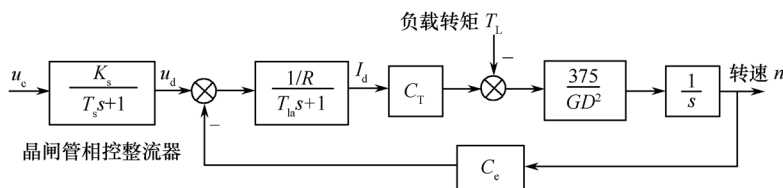


图 5-22 晶闸管-直流电动机开环调速系统方块图

开环调速系统往往不能满足生产机械对静差率和调速范围的要求,为此需要采用反馈控制的闭环调速系统以降低静差率,提高调速范围和抗扰能力。基于经典控制理论设计的转速、电流双闭环直流调速系统已得到广泛应用。下面举例说明基于状态空间综合法的直流调速控制系统设计。

已知参数:(他励)直流电动机的额定电压  $U_N = 220\text{V}$ ,额定电流  $I_N = 136\text{A}$ ,额定转速  $n_N = 1460\text{r/min}$ ,电势常数  $C_e = 0.132\text{V} \cdot \text{min/r}$ ,转矩常数  $C_T = 1.2606\text{N} \cdot \text{m/A}$ ,允许过载倍数  $\lambda = 1.5$ 。相控整流器放大系数  $K_s = 40$ ,失控时间  $T_s = 0.0017\text{s}$ 。电枢回路总电阻  $R = 0.5\Omega$ ,电磁时间常数  $T_{la} = 0.03\text{s}$ 。电动机轴上的等效飞轮惯量  $GD^2 = 22.5\text{N} \cdot \text{m}^2$ 。

设计指标:超调量  $\sigma\% \leq 5\%$ ,调节时间  $t_s \leq 0.5\text{s}$ ,当负载转矩阶跃变化时,系统跟踪阶跃参考输入信号(速度指令)的稳态误差为零。

### 1. 建立图 5-22 所示被控对象的状态空间模型

画出与图 5-22 对应的模拟结构图(状态变量图),如图 5-23 所示。

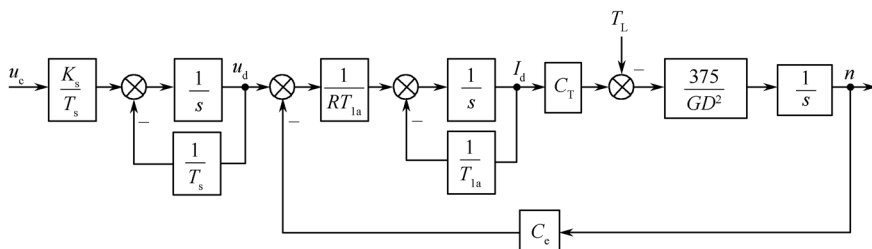


图 5-23 与图 5-22 对应的模拟结构图(状态变量图)

将  $T_L$  视为扰动信号,选取状态变量  $x_1 = n, x_2 = I_d, x_3 = u_d$ ,控制输入  $u = u_c$ ,由图 5-23 可得被控对象的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{375C_T}{GD^2}x_2 - \frac{375}{GD^2}T_L \\ \dot{x}_2 = -\frac{C_e}{RT_{la}}x_1 - \frac{1}{T_{la}}x_2 + \frac{1}{RT_{la}}x_3 \\ \dot{x}_3 = -\frac{1}{T_s}x_3 + \frac{K_s}{T_s}u \end{cases} \quad (5-112)$$

将已知参数代入式(5-112)并设输出  $y = n = x_1$ ,得被控对象的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 21.01 & 0 \\ -8.80 & -33.33 & 66.67 \\ 0 & 0 & -588.24 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 23529.41 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -16.67 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} T_L \\ y = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{x} \end{cases} \quad (5-113)$$

## 2. 检查被控系统的结构性质

求得被控系统式(5-113)的特征值为 $-7.03, -26.30, -588.24$ ,故被控系统稳定。

因为 $\text{rank}[\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}] = 3, \text{rank}[\mathbf{C}^T, \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T, (\mathbf{A}^T)^2\mathbf{C}^T] = 3$ ,故被控系统能控且能观测。

## 3. 反馈控制律设计

为满足设计指标,采用图 5-16 所示的状态反馈加积分器校正的输出反馈系统。因为 3 维单输出( $m=1$ )被控系统 $\Sigma_0(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 能控且能观测,且 $\text{rank}\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} = 4 = 3 + 1$ ,满足式(5-94)的条件,故增广系统能控,可采用线性状态反馈控制律

$$u = -\mathbf{K}_1 \mathbf{x} + K_2 w \quad (5-114)$$

将闭环系统极点配置到复平面左半开平面的任意期望位置且可消除阶跃扰动及阶跃参考输入作用下的稳态误差,其中, $\mathbf{K}_1 = [K_{11} \ K_{12} \ K_{13}]$ , $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ ,由于引入系统误差积分器校正所附加的状态变量 $w$ 为

$$w = v - y \quad (5-115)$$

式中, $v$ 为系统参考输入。

由经典控制理论,闭环极点为 $\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ 的欠阻尼二阶线性定常系统的超调量 $\sigma\%$ 及调节时间 $t_s$ 分别为

$$\sigma\% = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% \quad (5-116)$$

$$t_s = \frac{3.5}{\zeta\omega_n} \quad (5-117)$$

据式(5-116)及式(5-117),可确定满足 $\sigma\% \leq 5\%, t_s \leq 0.5\text{s}$ 设计指标的期望闭环主导极点对为

$$\lambda_{1,2}^* = -10 \pm j10$$

选择两个期望的闭环非主导极点离虚轴为主导极点 5 倍以上,取 $\lambda_{3,4}^* = -60$ 。

据期望闭环极点,采用 MATLAB 极点配置函数可求出增广系统状态反馈增益阵 $\mathbf{K} = [K_{11} \ K_{12} \ K_{13} \ ; \ K_2]$ ,MATLAB Program 5\_5 为求解程序:

```
% MATLAB Program 5_5
A=[0 21.01 0;-8.8 -33.33 66.67;0 0 -588.24];
B=[0;0;23529.41];C=[1 0 0];%建立被控系统的系数矩阵 A,B,C
Az=[A [0;0;0];-C 0];Bz=[B;0];Cz=[C 0];%建立增广被控系统的系数矩阵 Az,Bz,Cz
P=[-10+j*10;-10-j*10;-60;-60];%P为闭环期望极点向量
Km=acker(Az,Bz,P);%Km=[K11 K12 K13 -K2]
K=[Km(1,1),Km(1,2),Km(1,3),-Km(1,4)]%得增广系统状态反馈增益阵 K
```

执行 MATLAB Program 5\_5,求得增广系统状态反馈增益阵

$$\mathbf{K} = [K_{11} \ K_{12} \ K_{13} \ ; \ K_2] = [0.0023 \ 0.0016 \ -0.0205 \ ; \ 0.0218]。$$

## 4. 仿真分析

基于 MATLAB SIMULINK 建立状态反馈加积分器校正的输出反馈系统仿真模型,如图 5-24 所示。

图 5-25 所示为闭环系统阶跃响应和抗负载扰动的性能仿真结果,其仿真参数设置为:参考输入信号 $v=1200 \cdot 1(t)(\text{r/min})$ ;负载转矩 $T_L=150 \cdot 1(t-2)-100 \cdot 1(t-4)$ , $T_L$ 的单位为 $\text{N} \cdot \text{m}$ ,即起始仿真时负载转矩为 0,2s 时负载阶跃增加为 $150\text{N} \cdot \text{m}$ ,4s 时负载阶跃降低为 $50\text{N} \cdot \text{m}$ 。由仿真结果可见,采用状态反馈加积分器校正的输出反馈系统达到了要求的动、静态性能指标。应该



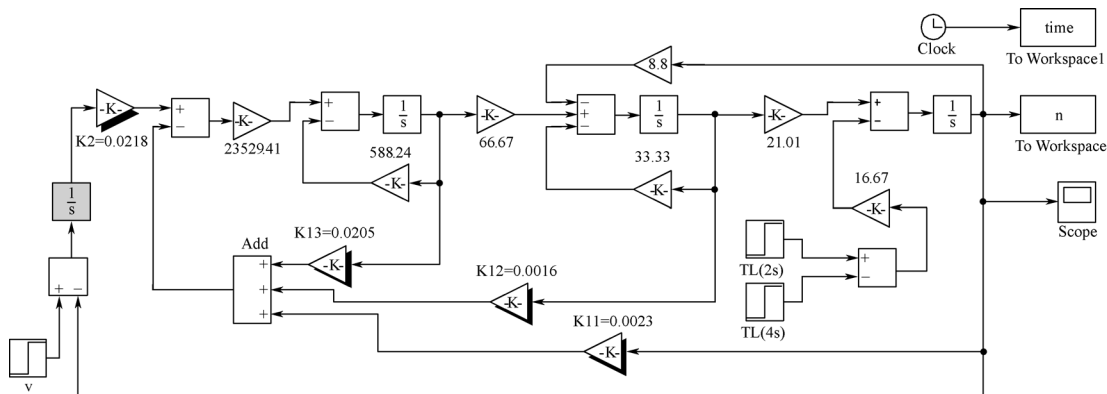


图 5-24 状态反馈加积分器校正闭环系统仿真模型

指出,以上设计尚未考虑专门的限流措施。但直流电动机在启动、制动、堵转时,若无限流措施,将会产生很大的过电流,这不仅不利于电动机换向,而且会损坏电力电子变流装置,因此,闭环调速系统中必须有限流环节。为了系统安全可靠运行,应在上述状态反馈加积分器校正闭环调速系统的基础上,增加自动限制电枢电流的环节,如增加电流截止负反馈等,对这一问题的研究可参阅相关文献。

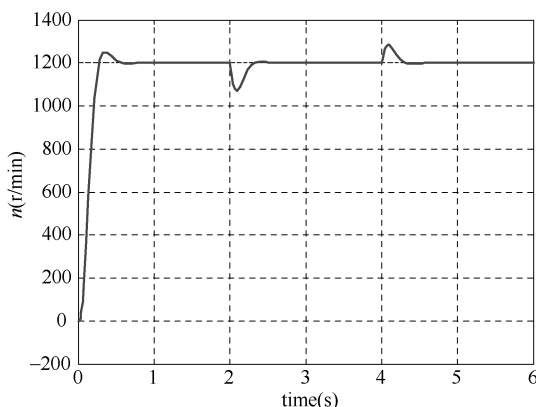


图 5-25 空载启动特性及抗负载扰动特性仿真结果

关于状态观测器在直流调速系统中的应用,限于篇幅,本书不再赘述。

## 小 结

本章讨论了基于状态空间描述综合线性定常系统问题中的极点配置、镇定、解耦控制、状态观测器、稳态跟踪问题。其中,极点配置、镇定、状态观测器是较为基本的问题,应正确理解其所涉及的基本概念,掌握其所涉及的基本方法及基本运算。

在现代控制理论中,反馈仍是基本的控制方式,且更多地采用状态反馈。若被控系统状态完全能控,则利用状态反馈可任意配置闭环系统的特征值(定理 5-3),这是状态反馈最重要的性质,其体现了系统能控性概念的实用价值。本章关于定理 5-3 充分性的证明过程给出了单输入单输出系统设计反馈增益矩阵的规范算法,其适合于计算机编程运算,但当被控系统阶次较低时,采用解联立方程的方法则较为简便。

线性非动态输出反馈具有易于工程实现的突出优点,但不能任意配置反馈系统的极点是它

的局限(定理 5-4),为了使输出反馈达到满意的性能,往往要加入动态补偿器(定理 5-5)。

镇定问题是一类特殊的闭环极点配置问题,其期望闭环极点均只要求具有负实部。定理 5-6、定理 5-7 分别给出了线性定常系统采用状态反馈、输出反馈可镇定的充要条件。

输入量、输出量解耦控制是多变量线性定常系统综合理论的重要组成部分。使多变量系统实现解耦的基本思路是:通过引入控制装置使系统传递函数矩阵对角化,而具体实现方法主要有前馈补偿器解耦、输入变换与状态反馈相结合解耦等。

状态观测器理论是为了克服状态反馈物理实现的困难而提出的,其是现代控制理论中具有工程实用价值的基本内容之一。本章介绍了观测器理论中的基本问题,即观测器存在条件、闭环观测器极点配置问题和降维观测器问题。若被控系统状态完全能观,则闭环状态观测器的极点可任意配置(定理 5-8),定理 5-8 可由定理 5-3 和对偶原理获得证明,其体现了系统能观性概念的实用价值。配置状态观测器极点的方法也有规范算法和解联立方程的方法。对采用状态观测器实现状态反馈的控制系统,可根据分离原理即复合系统特征值的分离性质,分别独立设计状态反馈控制器及状态观测器。

在讨论状态反馈系统的稳态精度与跟踪问题的基础上,本章介绍了基于状态空间综合法的单倒立摆控制系统设计实例及直流调速控制系统设计实例。

对 MATLAB 在闭环极点配置、状态观测器设计中的应用本章也作了介绍。

## 思考题与习题 5

5-1 简述状态反馈系统与输出反馈系统的基本特性。

5-2 利用状态反馈实现极点任意配置的条件及配置的基本方法是什么?

5-3 为什么说配置极点并非离虚轴越远越好?

5-4 能控且能观系统采用输出反馈是否一定可镇定?

5-5 能控的系统一定是状态反馈可镇定的吗? 状态反馈可镇定的系统一定能控吗?

5-6 何谓全维状态观测器和降维状态观测器? 试述全维状态观测器的设计方法。

5-7 为什么通常希望状态观测器的响应速度较状态反馈系统的响应速度快? 状态观测器的响应速度越快越好吗? 为什么?

5-8 状态不完全能观系统一定不能构造状态观测器重构系统状态吗?

5-9 简述采用状态观测器的状态反馈系统的基本特性与设计思路。

5-10 说明线性系统的能控性、能观性和稳定性之间有何关系。

5-11 何谓解耦控制? 使多变量系统实现解耦的基本思路是什么?

5-12 能实现跟踪和抑制扰动的控制器有何显著特征?

5-13 设被控系统的状态空间表达式为 
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y = [1 \ 0 \ 1 \ 0] \mathbf{x} \end{cases}$$
 试回答:

(1) 该系统是否稳定? 该系统是否能控? 若该系统不稳定,能否通过状态反馈使闭环系统稳定? 能否采用状态反馈使闭环系统的极点配置为  $-3, -4, -1, -2$  或  $-3, -4, -1, -5$  或  $-3, -4, -2, -2$ ?

(2) 该系统是否能观? 能否构造状态观测器获得系统状态  $\mathbf{x}$  的估计值  $\hat{\mathbf{x}}$ ? 若可构造状态

观测器,能否使观测器的极点配置在 $-3, -4, -1, -2$ 或 $-3, -4, -5, -2$ 或 $-3, -4, -1, -5$ ?

5-14 被控系统 $\Sigma(A, B, C)$ 的状态空间表达式为
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0] \mathbf{x} \end{cases}$$
,试分别采用规范

算法和解联立方程方法设计状态反馈增益矩阵 $\mathbf{F}$ ,使闭环系统极点配置为 $-1+j$ 和 $-1-j$ ,并画出状态变量图。

5-15 设被控系统的状态方程为 $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$ ,试设计状态反馈增益矩阵

$\mathbf{F}$ ,使闭环系统极点配置为 $-10, -2 \pm j4$ 。

5-16 设被控系统的状态方程为 $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$ ,试问可否用状态反馈任意配置

闭环极点?试设计状态反馈增益矩阵 $\mathbf{F}$ ,使闭环系统极点配置为 $-5, -1 \pm j$ 。

5-17 设系统传递函数为 $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10}{s^3 + 6s^2 + 5s}$ ,试设计状态反馈增益矩阵 $\mathbf{F}$ ,使闭环系统的极点为 $-5, -1 \pm j$ 。

5-18 设系统传递函数为

$$\frac{(s-1)(s+2)}{(s+1)(s-2)(s+3)}$$

试问能否利用状态反馈将传递函数变成

$$\frac{s-1}{(s+2)(s+3)}$$

若有可能,试设计状态反馈增益矩阵 $\mathbf{F}$ 。

5-19 试判断下列系统通过状态反馈能否镇定。

$$(1) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (2) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (3) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

5-20 设被控系统的传递函数为 $G_o(s) = \frac{20}{s^3 + 4s^2 + 3s}$ 。

(1) 试设计状态反馈增益矩阵 $\mathbf{F}$ ,使闭环系统的极点为 $-10, -2 \pm j2$ ;

(2) 若采用在输出反馈控制回路中嵌入反馈动态补偿器 $H(s)$ 的方法设计反馈控制,希望达到与状态反馈一样的控制效果,即将闭环极点仍配置在 $-10, -2 \pm j2$ ,试求反馈动态补偿器 $H(s)$ ;

(3) 比较以上两种反馈控制的特点及实现的难易。

5-21 被控系统 $\Sigma(A, B, C)$ 同习题5-14,试:(1)分别采用规范算法和解联立方程方法设计极点为 $-3, -3$ 的全维状态观测器,并画出状态变量图;(2)设计极点为 $-3$ 的降维状态观测器,并画出状态变量图。

5-22 设被控系统的 $\Sigma(A, B, C)$ 的状态空间表达式为
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 1 \quad 1] \mathbf{x} \end{cases}$$

- (1) 设计一个全维状态观测器,将观测器的极点配置在 $-5, -5, -5$ 处;
- (2) 设计极点为 $-5, -5$ 的降维状态观测器;
- (3) 画出状态变量图。

5-23 被控系统 $\Sigma(A, B, C)$ 同习题 5-14,试:(1) 设计极点为 $-3, -3$ 的全维状态观测器;利用该观测器构成状态反馈系统,使闭环极点配置为 $-1+j$ 和 $-1-j$ ,设计满足要求的状态反馈增益矩阵  $F$ ; (2) 画出带观测器的状态反馈系统的状态变量图并求闭环系统的传递函数。

5-24 设被控系统的传递函数为

$$G_o(s) = \frac{4}{s^2 - 4}$$

试:(1) 设计状态反馈增益矩阵  $F$ ,使闭环系统的极点配置为 $-2+j2$ ,并设计实现状态反馈的全维及降维观测器;(2) 分别画出整个系统的状态变量图并求闭环系统的传递函数。

## 上机实验题 5

5-1 用 MATLAB 求解习题 5-16、习题 5-17、习题 5-22。

5-2 设被控系统的状态空间表达式为  $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$ , 试分析能否采用状

态反馈使闭环系统的极点配置为 $-2, -2, -2, -1$ 或 $-2, -2, -2, -2$ ? 若可能,用 MATLAB 求出满足要求的状态反馈增益矩阵  $F$ 。

5-3 设被控系统的 $\Sigma(A, B, C)$ 的状态空间表达式为  $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 0 \ 1] \mathbf{x} \end{cases}$ , 用

MATLAB 分析该系统通过状态反馈能否镇定?

5-4 设被控系统的状态空间表达式为  $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u \\ y = [3 \ 0 \ 1 \ 0] \mathbf{x} \end{cases}$ , 试应用 MATLAB:

- (1) 求系统的极点,判断系统是否稳定?
- (2) 判断系统的能控性与能观性,并分别将系统按能控性和能观性进行结构分解;
- (3) 求能控子系统和不能控子系统的极点,进而判断系统通过状态反馈能否镇定?
- (4) 分析能否采用状态反馈使闭环系统的极点配置为 $-2+j2, -2-j2, -5, -1$ 或 $-2+j2, -2-j2, -3, -5$ 或 $-2+j2, -2-j2, -3, -1$ ? 若可能,求出满足要求的状态反馈增益矩阵  $F$ 。
- (5) 求能观子系统和不能观子系统的极点,进而判断系统能否构造状态观测器重构系统状态? 若可构造状态观测器,能否使观测器的极点配置在 $-1+j, -1-j, -3, -4$ 或 $-1+j, -1-j, -5, -4$ 或 $-1+j, -1-j, -3, -5$ ? 若可能,求出满足要求的观测器偏差反馈增益矩阵  $G$ 。

5-5 在 5.9.2 节单倒立摆控制系统设计实例的基础上,合理确定状态观测器系统矩阵期望

特征值的分布,设计对状态向量  $\mathbf{x}$  进行估计的全维状态观测器以实现状态反馈,并保证观测器的引入不致影响控制系统的性能;在 SIMULINK 中建立采用状态观测器实现全状态反馈的单倒立摆无静差(1 型)位置跟踪系统的动态仿真模型,对其单位阶跃响应进行仿真,并与图 5-20 进行比较。

5-6 设被控系统的传递函数为  $G_o(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+8)}$ , 现在采用图 5-15 所示带有输入变换的状态反馈控制改善系统的性能,要求控制系统满足如下性能指标:超调量  $\sigma \leq 5\%$ ;调节时间  $t_s \leq 0.5$  秒;跟踪阶跃输入信号的稳态误差  $e_p = 0$ ;跟踪单位斜坡输入信号的稳态误差  $e_v \leq 0.2$ 。

(1) 根据控制系统综合指标设计状态反馈增益矩阵  $\mathbf{F}$  及输入变换线性放大器  $K$ ,并在 SIMULINK 中建立控制系统的动态仿真模型,对系统的动态和静态性能进行仿真分析。

(2) 根据控制系统的响应速度,合理确定状态观测器系统矩阵期望特征值的分布,设计对状态向量  $\mathbf{x}$  进行估计的全维状态观测器以实现状态反馈,并保证控制系统的性能仍满足要求;在 SIMULINK 中建立采用状态观测器实现状态反馈的控制系统的动态仿真模型,对系统的动态和静态性能进行仿真分析,并与采用直接状态反馈的控制系统仿真结果比较;观察单位阶跃输入作用下状态估计值  $\hat{\mathbf{x}}$  与状态真实值  $\mathbf{x}$  的误差的收敛过程,并研究状态估计误差收敛速度与状态观测器极点的关系及其对系统性能的影响。

(3) 设系统输出量可准确测量,试设计实现状态反馈的降维观测器;在 SIMULINK 中建立采用降维状态观测器实现状态反馈的控制系统的动态仿真模型,对系统的动态和静态性能进行仿真分析。

5-7 PWM 变换器一直流电动机开环调速系统方块图如图 5-26 所示。

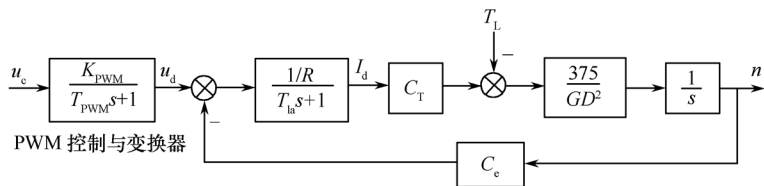


图 5-26 PWM 变换器一直流电动机开环调速系统方块图

图 5-26 中,直流电动机(他励)的参数为:  $P_N = 17\text{kW}$ ,  $n_N = 1500\text{r/min}$ ,  $I_N = 90\text{A}$ ,  $U_N = 220\text{V}$ , 电势常数  $C_e = 0.1377\text{V} \cdot \text{min/r}$ , 转矩常数  $C_T = 1.3147\text{N} \cdot \text{m/A}$ , 允许过载倍数  $\lambda = 1.5$ 。PWM 控制与变换器的放大系数  $K_{\text{PWM}} = 86.8$ , 开关周期  $T_{\text{PWM}} = 0.2 \times 10^{-3}\text{s}$ 。电枢回路总电阻  $R = 0.45\Omega$ , 电枢回路电磁时间常数  $T_{\text{la}} = 4.2 \times 10^{-3}\text{s}$ 。系统总飞轮惯量  $GD^2$  为  $22.8\text{N} \cdot \text{m}^2$ 。图中,  $u_d$  为 PWM 装置输出理想空载电压(V);  $I_d$  为电枢回路直流电流(A);  $n$  为电动机转速(r/min);  $T_L$  为负载转矩( $\text{N} \cdot \text{m}$ );  $u_c$  为 PWM 控制器的控制电压。

要求闭环系统满足如下性能指标:超调量  $\sigma \leq 8\%$ , 调节时间  $t_s \leq 0.3\text{s}$ , 当负载转矩阶跃变化时,系统跟踪阶跃输入(速度指令)信号的稳态误差为零。

(1) 若采用状态反馈加积分器校正的输出反馈系统,设计状态反馈增益矩阵和积分增益常数,基于 MATLAB SIMULINK 对系统的动、静态特性进行仿真分析;

(2) 增加限制电动机电枢过电流的环节,对其限制过电流的效果及对系统动态性能的影响进行仿真分析。

## 第 6 章 最优控制的基本理论及应用

### 6.1 引言

最优控制理论是现代控制理论的核心。具体的最优是相对的,是相对于某些特定的性能指标而言的。所谓最优控制系统,就是在一定的具体条件下,在完成所要求的具体任务时,系统的某些性能指标具有最优值。根据系统的不同用途,可提出各种不同的性能指标。最优控制系统的设计,在于选择最优控制律,以使某一性能指标达到极值(极大或极小)。

经典控制理论采用输出反馈,但因为输出变量中不可能包含系统状态变量的全部信息,所以从理论上输出反馈不可能全面达到最优。现代控制理论中的最优是用全状态反馈实现的,所以具有更普遍的意义。

从数学的观点看,最优控制研究的问题是求解一类带有约束条件的泛函极值问题,本质上是一个变分学问题。变分法是数学的一个古老的分支,起源于 17 世纪。经典变分理论只能解决控制无约束即容许控制属于开集的一类最优控制问题,但实际上遇到更多的却是容许控制为闭集的一类最优控制问题。针对经典变分法的局限性,美国学者贝尔曼在 1953~1957 年间创立了“动态规划”,发展了变分学中的哈密顿-雅可比理论,解决了控制有闭集约束的变分问题;而前苏联学者庞特里亚金等则在 1956~1958 年间创立了极小值原理,也发展了经典变分原理,成为处理控制有闭集约束的变分问题的强有力工具。

本章在介绍解决最优控制问题 3 种基本方法(变分法、极小值原理和动态规划)的基础上,阐述两类典型最优反馈系统的设计,即线性二次型最优控制和最小时间控制。

### 6.2 最优控制问题的提出及数学描述

#### 6.2.1 最优控制问题实例

##### 1. 最速升降问题

设有一物体 M,作垂直升降运动,如图 6-1 所示,这里 M 可以理解为一架直升飞机或矿井中的升降机。假定在 M 内部装有一个控制器,它可以产生一个作用力  $u(t)$ ,从而控制物体 M 的上下运动,由于作用力的大小有限,所以应满足不等式  $|u(t)| \leq k$ ,其中  $k$  是常数。设已知 M 在  $t=t_0$  时,离地面的高度为  $x(t_0)$ ,垂直运动的速度为  $\dot{x}(t_0)$ ,问题是寻找作用力  $u(t)$  的变化规律,使 M 最快到达地面,并使其到达地面时的速度为零。

现在对最速升降问题稍加分析。令物体 M 的质量为  $m$ ,用  $x(t)$  表示 M 离地面的高度,其方向规定为地面上  $x(t)$  为正,在地面下  $x(t)$  为负。作用力  $u(t)$  是向上为正,向下为负,则物体 M 的运动方程为

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = u(t) - mg$$

式中,  $mg$  为物体所受重力,  $g$  为重力加速度。

令  $x_1(t) = x(t)$  表示物体的高度,  $x_2(t) = \frac{dx}{dt}$  表示物体的升降速度, 则上式可写成状态方程

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{u(t)}{m} - g$$

其初始条件是  $x_1(t_0) = x_{10}$ ,  $x_2(t_0) = x_{20}$ 。现需寻找一个能使物体以最短时间从初态  $(x_{10}, x_{20})$  到达终态  $(0, 0)$  的控制  $u(t)$ 。定义系统的性能指标为

$$J = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0$$

式中,  $t_0$  为起始时刻,  $t_f$  为终止时刻。要求时间最短, 即使性能指标  $J$  最小, 这样求得的控制即为最优控制  $u^*(t)$ 。

## 2. 搅拌槽问题

设有一盛放液体的连续搅拌槽, 如图 6-2 所示。槽内装有不停转动着的搅拌器 S, 使液体经常处于完全混合状态, 槽中原放  $0^\circ\text{C}$  的液体。现需将其温度升高, 为此在入口处送进一定量的液体, 其温度为  $u(t)$ , 出口处流出等量的液体, 以保持槽内液面恒定。试寻找  $u(t)$  的变化规律, 使槽中液体温度经 1 小时后上升到  $40^\circ\text{C}$ , 并要求散失的热量最小。

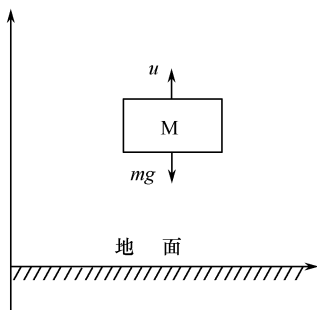


图 6-1 最速升降问题示意图

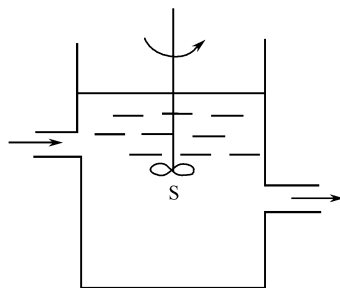


图 6-2 搅拌槽问题示意图

因假定槽中液体处于完全混合状态, 故可用  $x(t)$  表示其温度。由热力学知, 槽中液体温度的变化率与温差  $[u(t) - x(t)]$  成正比, 为简便计算, 令比例系数为 1, 于是有

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t) - x(t), x(0) = 0$$

在 1 小时内散失的热量为

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} [qx^2(t) + ru^2(t)] dt$$

式中,  $q$  和  $r$  都是正的常数,  $t_0 = 0$ ,  $t_f = 1$ 。因此该最优控制问题是: 寻找  $u(t)$  的变化规律, 使槽中液体经 1 小时后从  $0^\circ\text{C}$  上升到  $40^\circ\text{C}$ , 并要求散失的热量最小, 即  $J(u)$  取最小值。

## 6.2.2 最优控制问题的数学描述

综合以上实例, 构成最优控制问题必须具备以下几个基本条件。

### 1. 被控系统的数学模型, 即动态系统的状态方程

对连续时间系统

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t] \quad (6-1)$$

式中,  $\mathbf{x}(t)$  是  $n$  维状态向量,  $\mathbf{u}(t)$  为  $r$  维控制向量,  $f[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t]$  是  $\mathbf{x}(t)$ 、 $\mathbf{u}(t)$  和  $t$  的  $n$  维连续向量函数, 且对  $\mathbf{x}(t)$  和  $t$  连续可微,  $\mathbf{u}(t)$  在  $[t_0, t_f]$  上分段连续, 其中  $t_0$  为系统起始控制时刻,  $t_f$  为系统终端控制时刻。

对离散时间系统

$$\mathbf{x}(k+1) = f[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k] \quad (6-2)$$

式中, 各符号定义同式(6-1)。

状态方程在最优控制中为等式约束条件。

## 2. 控制变量的约束条件(容许控制)

任何实际物理系统, 控制变量总是受约束的, 一般可写成

$$\mathbf{u}(t) \in U \quad (6-3)$$

式中,  $U$  表示一个封闭的点集合, 称为控制域。此时称  $\mathbf{u}(t)$  为容许控制。

## 3. 状态方程的边界条件(初始状态和终值状态)

一个动态过程在状态空间中, 是从一个状态到另一个状态的转移。如果把这种转移看成  $n$  维状态空间  $R^n$  中点的运动, 则一个动态过程对应于状态空间中的一条轨线。在最优控制问题中,  $t=t_0$  时的初态通常是已知的, 即

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (6-4)$$

而终值状态可以是状态空间中一个确定的点, 也可以是状态空间中某一个点集(目标集)中的任意一点。到达终端的时间  $t_f$  和终值状态  $\mathbf{x}(t_f)$  因问题而异。就终端时间  $t_f$  来说, 它可以是固定的, 也可以是变动的或自由的。最通常的终值边界条件是

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f \quad (6-5)$$

但有时并不这样简单, 如用导弹攻击运动的目标, 终值可能是运动轨迹上的一个点, 此时终值状态是受运动轨迹约束的。一般地, 约束可表示为

$$g_i(\mathbf{x}_f, t_f) = 0, i = 1, 2, \dots, l (l \leq n) \quad (6-6)$$

## 4. 性能指标(也称性能泛函或目标函数)

性能指标是衡量系统在任一容许控制作用下性能好坏的尺度, 在最优控制中, 其代替了传统的设计指标(如超调、调节时间、幅值裕度和相角裕度等)。性能指标是一个标量, 其内容与形式取决于最优控制问题所要完成的任务。控制系统的用途不同, 则所选择的性能指标不同, 所求得的最优控制律也不同。因此, 必须首先从物理意义上明确对系统性能的要求, 然后将其转化为数学表达式, 其数学形式分为如下 3 类。

### (1) 积分型性能泛函

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad (6-7)$$

这是一种积分型泛函(关于泛函的定义见 6.3 节)。在变分法中, 这类问题称为拉格朗日问题。它要求状态向量及控制向量在整个动态过程中都应满足一定要求。

### (2) 终值型性能泛函

$$J = \Phi[\mathbf{x}(t_f), t_f] \quad (6-8)$$

这种性能泛函只对系统在动态过程结束时的终端状态  $\mathbf{x}(t_f)$  提出了要求, 而对于整个过程中的系统状态和控制的演变则不作任何要求。终端时刻  $t_f$  可以固定, 也可以自由, 视最优控制问题的性质而定。在变分法中, 这类问题称为迈耶尔问题。



### (3) 复合型性能泛函

$$J = \Phi[\mathbf{x}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] dt \quad (6-9)$$

这一性能指标对控制过程和终端状态均有要求,是上述两种性能指标形式的综合,为最一般的性能泛函形式。在变分法中,复合型性能泛函的最优控制问题称为波尔扎问题。

最优控制问题,就是从可供选择的容许控制集  $U$  中,寻求一个控制向量  $\mathbf{u}(t)$ ,使被控系统在时间域  $[t_0, t_f]$  内,从初态  $\mathbf{x}(t_0)$  转移到终态  $\mathbf{x}(t_f)$  或目标集  $\mathbf{x}(t_f) \in \Omega_f$  时,性能泛函  $J$  取最小(大)值。满足上述条件的控制作用  $\mathbf{u}(t)$  称为最优控制  $\mathbf{u}^*(t)$ 。在  $\mathbf{u}^*(t)$  作用下,状态方程的解称为最优轨迹  $\mathbf{x}^*(t)$ 。沿最优轨迹  $\mathbf{x}^*(t)$ ,使性能泛函  $J$  所达到的最优值,称为最优指标  $J^*$ 。

## 6.3 变 分 法

### 6.3.1 变分法的基本概念

#### 1. 泛函

由数学知识知,如果变量  $x$  因为变量  $t$  的变化而按某一确定的规律变化,则称  $x$  是  $t$  的函数,记作  $x=x(t)$ ,这里宗量  $t$  是独立自变量,而  $x$  是因变量。函数  $x=x(t)$  规定了数  $x$  与数  $t$  的对应关系,即对应于  $t$  定义域中的每个  $t$  值,  $x$  都有一个(或一组)确定的值与之对应。

泛函是函数概念的一种扩充。如果对于某一类函数集合  $\{x(t)\}$  中的每个函数  $x(t)$ ,因变量  $J$  都有一个确定的值与之对应,则称因变量  $J$  为这个宗量函数  $x(t)$  的泛函,简称泛函,记作  $J=J[x(t)]$ 。可见,若一个因变量的宗量不是独立自变量,而是另一些独立自变量的函数,该因变量则为这个宗量函数的泛函,因此,泛函可理解为“函数的函数”,其值由宗量函数的选取而定。

例如,函数的定积分

$$J[x(t)] = \int_0^2 x(t) dt \quad (6-10)$$

是一个泛函,因为对每个确定的被积函数  $x(t)$  (宗量函数)都有确定的定积分值(泛函  $J$  的值)与之对应,例如,当  $x(t)=\sin t$  时,有  $J[x(t)]=1-\cos 2$ ;而当  $x(t)=t$  时,则有  $J[x(t)]=2$ 。

与多元函数的宗量(自变量)多于一个相类似,多元泛函的宗量函数则多于一个,这些宗量函数可以表示为一个向量。例如,在控制系统中,  $n$  维状态向量  $\mathbf{x}(t)$  为时间  $t$  的函数,若取如下形式的积分型性能指标

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L[\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t] dt \quad (6-11)$$

则  $J$  的数值取决于  $n$  维向量函数  $\mathbf{x}(t)$ ,故式(6-11)为(多元)泛函。

#### 2. 泛函的连续与线性泛函

(1) 若对任给的  $\epsilon > 0$ ,存在  $\delta > 0$ ,使得当  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < \delta$  时,就有

$$|J[\mathbf{x}(t)] - J[\mathbf{x}^*(t)]| < \epsilon \quad (6-12)$$

式中,  $\|\cdot\|$  为在函数空间中定义的范数,则称泛函  $J[\mathbf{x}(t)]$  在函数  $\mathbf{x}^*(t)$  处是连续的。

(2) 连续泛函  $J(\mathbf{x})$  若满足如下线性条件

$$J[k\mathbf{x}] = kJ[\mathbf{x}] \quad (6-13)$$

$$J[\mathbf{x}_\alpha + \mathbf{x}_\beta] = J[\mathbf{x}_\alpha] + J[\mathbf{x}_\beta] \quad (6-14)$$

则称  $J(\mathbf{x})$  是线性泛函。式中,  $k$  是实数,  $\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}_\beta$  为函数空间中的函数。

应该指出,在用变分法求解最优控制问题时,要求性能泛函  $J[\mathbf{x}]$  为线性连续泛函。

### 3. 泛函的变分

通过将泛函的变分与函数的微分进行对比可加深对泛函变分的认识。

**函数微分的定义** 若函数  $y=f(t)$  具有连续的导数,则当自变量  $t$  有增量  $\delta t$  且  $\delta t \rightarrow 0$  时,函数  $y=f(t)$  的增量为

$$\Delta y(t) = f(t+\delta t) - f(t) = \dot{f}(t)\delta t + o(t, \delta t) \quad (6-15)$$

式中,右端第一项  $\dot{f}(t)\delta t$  是  $\delta t$  的线性函数,第二项  $o(t, \delta t)$  是  $\delta t$  的非线性函数且为  $\delta t$  的高阶无穷小,即当  $|\delta t|$  很小时,  $o(t, \delta t)$  可忽略,第一项  $\dot{f}(t)\delta t$  与  $\Delta y(t)$  很接近。因此,将第一项称为函数增量的线性主部,也称为函数  $y=f(t)$  在点  $t$  处的微分,记为  $dy$ ,即

$$dy = \dot{f}(t)dt \quad (6-16)$$

**宗量函数变分的定义** 可对照自变量微分的定义,理解如下宗量函数变分的定义。设  $J[x(t)]$  为连续泛函,则宗量函数  $x(t)$  的变分为属于同一函数类中两个函数  $x(t), x_0(t)$  之差,即

$$\delta x(t) = x(t) - x_0(t) \quad (6-17)$$

**泛函变分的定义** 设  $J[\mathbf{x}(t)]$  为  $n$  维线性赋范空间  $R^n$  上的连续泛函,若其增量可表示为

$$\begin{aligned} \Delta J[\mathbf{x}] &= J[\mathbf{x}(t) + \delta \mathbf{x}(t)] - J[\mathbf{x}(t)] \\ &= L[\mathbf{x}(t), \delta \mathbf{x}(t)] + o[\mathbf{x}(t), \delta \mathbf{x}(t)] \end{aligned} \quad (6-18)$$

式中,  $\delta \mathbf{x}(t)$  为宗量函数  $\mathbf{x}(t)$  的变分,  $L[\mathbf{x}(t), \delta \mathbf{x}(t)]$  是  $\delta \mathbf{x}(t)$  的线性连续泛函,  $o[\mathbf{x}(t), \delta \mathbf{x}(t)]$  是关于  $\delta \mathbf{x}(t)$  的高阶无穷小,则定义泛函增量的线性主部

$$\delta J = L[\mathbf{x}(t), \delta \mathbf{x}(t)] \quad (6-19)$$

为泛函  $J[\mathbf{x}(t)]$  的变分,记作  $\delta J$ 。若泛函有变分,则称该泛函可微。与函数的微分等于函数的导数与自变量的微分之乘积(见式(6-16))相对应,泛函变分也可利用求导的方法来计算,即

$$\delta J = \frac{\partial}{\partial \epsilon} (J[\mathbf{x}(t) + \epsilon \delta \mathbf{x}(t)]) \Big|_{\epsilon=0}, 0 \leq \epsilon \leq 1 \quad (6-20)$$

**【例 6-1】** 求泛函  $J = \int_{t_0}^{t_f} x^2(t)dt$  的变分,其中,  $x(t)$  为标量函数。

**解** 由式(6-20)得

$$\begin{aligned} \delta J &= \frac{\partial}{\partial \epsilon} (J[x(t) + \epsilon \delta x(t)]) \Big|_{\epsilon=0} = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left( \int_{t_0}^{t_f} [x(t) + \epsilon \delta x(t)]^2 dt \right) \Big|_{\epsilon=0} \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial}{\partial \epsilon} [x(t) + \epsilon \delta x(t)]^2 \Big|_{\epsilon=0} dt = \int_{t_0}^{t_f} 2[x(t) + \epsilon \delta x(t)] \delta x(t) \Big|_{\epsilon=0} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} 2x(t) \delta x(t) dt \end{aligned}$$

### 4. 泛函的极值与泛函极值的必要条件

如果泛函  $J[x(t)]$  在任何一条与  $x^*(t)$  接近的曲线上所取的值不小于  $J[x^*(t)]$ ,即

$$\Delta J = J[x(t)] - J[x^*(t)] \geq 0 \quad (6-21)$$

则称泛函  $J[x(t)]$  在  $x^*(t)$  曲线上达到极小值。反之,若

$$\Delta J = J[x(t)] - J[x^*(t)] \leq 0 \quad (6-22)$$

则称泛函  $J[x(t)]$  在  $x^*(t)$  曲线上达到极大值。

**定理 6-1(泛函极值定理)** 若可微泛函  $J[\mathbf{x}(t)]$  在  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$  上达到极值,则  $J[\mathbf{x}(t)]$  在  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(t)$  上的变分等于零,即

$$\delta J = 0 \quad (6-23)$$

定理 6-1 表明,泛函一次变分为零,是泛函达到极值的必要条件。

综上所述,变分在泛函研究中的作用,相当于微分在函数研究中的作用。事实上,求泛函极大(小)值问题称为变分问题,求泛函极值的方法称为变分法。

### 6.3.2 用变分法求解无约束条件的泛函极值问题

设积分型性能泛函为

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L[\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t] dt \quad (6-24)$$

在区间 $[t_0, t_f]$ 上,被积函数 $L[\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t]$ 二次连续可微,轨线 $\mathbf{x}(t)$ 有连续的二阶导数, $\mathbf{x}(t) \in R^n$ ,对 $\mathbf{x}(t)$ 没有任何约束。要求确定极值轨迹 $\mathbf{x}^*(t)$ ,使泛函 $J$ 为极值。

下面分几种情况进行讨论。

#### 1. 始端时刻和终端时刻固定时的泛函极值问题

首先讨论不仅初始时刻 $t_0$ 、终端时刻 $t_f$ 固定,而且初始状态 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ 、终端状态 $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ 固定这一最简单情况下无约束条件的泛函极值问题(最优控制的基本问题)。

**定理 6-2** 设初始时刻 $t_0$ 和初始状态 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ 固定,且终端时刻 $t_f$ 和终端状态 $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ 固定,则使性能泛函式(6-24)取极值的必要条件是: $\mathbf{x}(t)$ 为二阶微分方程

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \mathbf{0} \quad (\text{欧拉方程}) \quad (6-25)$$

$$\left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right)^T \bigg|_{t_0}^{t_f} = \mathbf{0} \quad (\text{横截条件}) \quad (6-26)$$

的解。其中,在区间 $[t_0, t_f]$ 上, $L[\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t]$ 二次连续可微, $\mathbf{x}(t)$ 有连续的二阶导数, $\mathbf{x}(t) \in R^n$ ,对 $\mathbf{x}(t)$ 没有任何约束。

式(6-25)称为欧拉-拉格朗日方程,简称欧拉方程。

**证明** 设 $\mathbf{x}^*(t)$ 是使 $J$ 取极小值 $J^*$ 的最佳轨迹曲线,现在 $\mathbf{x}^*(t)$ 邻近作一微小摄动 $\epsilon \boldsymbol{\eta}(t)$ ,并令

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*(t) + \epsilon \boldsymbol{\eta}(t) \quad (6-27)$$

式中, $\epsilon$ 是一个很小的参数, $\boldsymbol{\eta}(t)$ 为任意选定的连续可微 $n$ 维向量函数且满足

$$\boldsymbol{\eta}(t_0) = \boldsymbol{\eta}(t_f) = \mathbf{0} \quad (6-28)$$

将 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*(t) + \epsilon \boldsymbol{\eta}(t)$ 和 $\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{x}}^*(t) + \epsilon \dot{\boldsymbol{\eta}}(t)$ 代入性能泛函式(6-24)可得

$$J(\epsilon) = \int_{t_0}^{t_f} L[\mathbf{x}^*(t) + \epsilon \boldsymbol{\eta}(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t) + \epsilon \dot{\boldsymbol{\eta}}(t), t] dt$$

性能泛函便成了 $\epsilon$ 的函数,并在 $\mathbf{x}^*(t)$ 上达到极值,即 $\epsilon=0$ 时, $J(0) = J^*$ 。取泛函增量

$$\begin{aligned} \Delta J(\epsilon) &= J(\epsilon) - J(0) = \int_{t_0}^{t_f} L[\mathbf{x}^*(t) + \epsilon \boldsymbol{\eta}(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t) + \epsilon \dot{\boldsymbol{\eta}}(t), t] dt - \\ &\quad \int_{t_0}^{t_f} L[\mathbf{x}^*(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t), t] dt \end{aligned}$$

将上式在 $\epsilon=0$ 的邻域内展开成泰勒(Taylor)级数,则

$$\Delta J(\epsilon) = \int_{t_0}^{t_f} \left[ \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \epsilon \boldsymbol{\eta}(t) + \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right)^T \epsilon \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) + R \right] dt \quad (6-29)$$

式中,  $R$  表示泰勒级数展开式中的高阶项。

如果定义  $\mathbf{x}(t)$  和  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  的一阶变分为

$$\delta \mathbf{x} = \varepsilon \boldsymbol{\eta}(t), \delta \dot{\mathbf{x}} = \varepsilon \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) \quad (6-30)$$

由泛函变分的定义, 泛函的一阶变分为式(6-29)泛函增量  $\Delta J$  的线性主部, 即

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left[ \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \delta \mathbf{x} + \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right)^T \delta \dot{\mathbf{x}} \right] dt \quad (6-31)$$

对上式积分中第二项作分部积分后可得

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right)^T \delta \mathbf{x} dt + \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right)^T \delta \mathbf{x} \Big|_{t_0}^{t_f} \quad (6-32)$$

由定理 6-1, 泛函  $J$  取极值的必要条件为其一次变分  $\delta J$  为零, 故令  $\delta J = 0$ , 并考虑到式(6-32)中  $\delta \mathbf{x}$  是任意的, 则无约束条件的性能泛函式(6-24)取极值的必要条件为

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \mathbf{0} \quad (\text{欧拉方程}) \quad (6-33)$$

$$\left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right)^T \delta \mathbf{x} \Big|_{t_0}^{t_f} = 0 \quad (\text{横截条件}) \quad (6-34)$$

证毕。

在固定端点问题中, 由于  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ , 可得  $\delta \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}, \delta \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{0}$ , 故此泛函极值的必要条件就是欧拉方程。

变分法总是从推导泛函极值的必要条件开始。欧拉方程是无约束泛函极值及有约束泛函极值的必要条件, 解欧拉方程是变分法解最优控制问题的一种重要方法。欧拉方程是一个二阶微分方程, 求解时所需的两点边界值由横截条件提供。因此, 欧拉方程和横截条件是求解变分问题的基础。

在  $t_0, t_f, \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$  均固定的情况下, 有  $\delta \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$  和  $\delta \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{0}$ , 这时定理 6-2 中的横截条件式(6-26)退化为已知的两点边界值  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  和  $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ , 即求解欧拉方程的边界条件为  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ 。

在讨论固定端点问题的基础上, 讨论自由端点问题。若  $t_0, t_f$  均固定但有一个端点  $[\mathbf{x}(t_0)$  或  $\mathbf{x}(t_f)]$  或两个端点自由时, 没有约束条件的性能泛函式(6-24)极值仍应满足式(6-25)所示的欧拉方程及式(6-26)所示的横截条件, 求解欧拉方程所欠缺的边界条件则应由横截条件补足。例如, 若  $t_0, t_f, \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  均固定, 终端  $\mathbf{x}(t_f)$  自由, 这时有  $\delta \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}, \delta \mathbf{x}(t_f) \neq \mathbf{0}$ , 则由横截条件式(6-26)有

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right|_{t=t_f} = \mathbf{0} \quad (6-35)$$

式(6-35)和已知的始点边界值  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  合起来构成该情况下的边界条件。

应该指出, 欧拉方程和横截条件只是泛函存在极值的必要条件, 并非充分条件。满足必要条件的函数是否确使泛函取得极值, 以及其极值究竟是极大值还是极小值, 尚应根据充分条件判定。但在处理多数工程问题时, 一般可从实际问题的物理含义判断泛函极值的存在性, 并直接利用欧拉方程和横截条件求出极值轨线。

**【例 6-2】** 设性能泛函为

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2x_1 x_2) dt$$

边界条件为  $x_1(0)=x_2(0)=0, x_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=x_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ , 求  $J$  为极值时的曲线  $x^*(t)$ 。

**解** 本例泛函为二元泛函, 即  $\mathbf{x}=[x_1 \quad x_2]^T$ , 被积函数为

$$L=\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+2x_1x_2$$

则 
$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}=\begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_1} \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2x_2 \\ 2x_1 \end{bmatrix}, \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}}=\begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\dot{x}_1 \\ 2\dot{x}_2 \end{bmatrix}, \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}}=\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} 2\dot{x}_1 \\ 2\dot{x}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\ddot{x}_1 \\ 2\ddot{x}_2 \end{bmatrix}$$

代入欧拉方程 
$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}}=\mathbf{0}$$

得 
$$\begin{bmatrix} 2x_2 \\ 2x_1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2\ddot{x}_1 \\ 2\ddot{x}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

展开并联立方程组为

$$\begin{cases} \ddot{x}_1-x_2=0 \\ \ddot{x}_2-x_1=0 \end{cases}$$

其通解为

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \sin t + c_4 \cos t \\ x_2(t) &= \ddot{x}_1 = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - c_3 \sin t - c_4 \cos t \end{aligned}$$

代入已知的两点边界值, 求出

$$c_1 = \frac{1}{e^{\pi/2} - e^{-\pi/2}} = \frac{1}{2\text{sh}(\pi/2)}, c_2 = -\frac{1}{2\text{sh}(\pi/2)}, c_3 = c_4 = 0$$

故极值曲线为

$$x_1^*(t) = x_2^*(t) = \frac{\text{sh}t}{\text{sh}(\pi/2)}$$

## 2. 终端时刻未给定的泛函极值问题(可变端点问题)

若始端时刻  $t_0$  给定, 始端状态  $\mathbf{x}(t_0)$  固定或沿规定的边界曲线移动, 而终端时刻  $t_f$  自由, 终端状态  $\mathbf{x}(t_f)$  自由或沿规定的边界曲线移动, 则这类最优控制问题称之为未给定终端时刻的泛函极值问题。对于这类问题, 为使性能泛函达到极值, 不仅要确定最优轨迹  $\mathbf{x}^*(t)$ , 而且应确定最优终端时刻  $t_f^*$ 。

**定理 6-3** 设轨线  $x(t)$  从固定始端  $x(t_0)=x_0$  到达给定终端曲线  $x(t_f)=C(t_f)$  上, 使性能泛函

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), \dot{x}(t), t) dt \quad (6-36)$$

取极值的必要条件是: 轨迹  $x(t)$  满足下列方程

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (\text{欧拉方程}) \quad (6-37)$$

$$\left( L + [\dot{C}(t) - \dot{x}(t)] \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \bigg|_{t=t_f} = 0 \quad (\text{终端横截条件}) \quad (6-38)$$

式中,  $x(t)$  应具有连续的二阶导数,  $L$  至少应二次连续可微,  $C(t)$  应具有连续的一阶导数。

定理 6-3 的证明从略, 这里只对该定理作如下说明:

(1) 定理 6-3 适用于始端时刻  $t_0$ 、始端状态  $x(t_0)=x_0$  给定, 终端时刻  $t_f$  自由但终态  $x(t_f)$  应

落在端点约束曲线  $C(t)$  上(即终端约束方程为  $x(t_f) = C(t_f)$ )的情况,这时仅已知始点  $x(t_0) = x_0$ ,而终点未知,因此,求解欧拉方程所欠缺的边界条件应由终端横截条件式(6-38)补足。式(6-38)确立了在终端处  $\dot{C}(t)$  和  $\dot{x}(t)$  之间的关系,并影响着  $x^*(t)$  和终端约束曲线  $C(t)$  在  $t_f$  时刻的交点。

(2) 可将定理 6-3 对  $x(t)$  是标量函数时所得到的公式推广到  $\mathbf{x}(t)$ 、 $\mathbf{C}(t)$  是  $n$  维向量函数的情况,即可得向量形式的泛函极值必要条件

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \mathbf{0} \quad (\text{欧拉方程}) \quad (6-39)$$

$$\left( L + [\dot{C}(t) - \dot{x}(t)]^T \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) \bigg|_{t=t_f} = 0 \quad (\text{终端横截条件}) \quad (6-40)$$

### 6.3.3 有约束条件的泛函极值问题

前面讨论了无约束条件的泛函极值问题,给出了极值曲线所应满足的必要条件——欧拉方程及横截条件,但这些结论往往还不能直接应用于求解最优控制问题。这是因为一切实际最优控制问题,性能泛函  $J$  所依赖的宗量函数不仅要满足前已讨论的端点限制条件,而且还要受到系统状态方程的约束,即只能从满足系统状态方程式的函数  $\mathbf{x}(t)$  的集合中选取极值轨线  $\mathbf{x}^*(t)$ 。求泛函在等式约束下的极值,称为条件泛函极值问题。应用拉格朗日乘子法,可将这类条件泛函极值问题转化为无约束条件的泛函极值问题。

最优控制问题中的性能泛函为

$$J = \Phi[\mathbf{x}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] dt \quad (6-41)$$

式中,性能泛函  $J$  所依赖的宗量函数  $\mathbf{x}(t)$ 、 $\mathbf{u}(t)$  受被控系统的状态方程约束,即

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \quad (6-42)$$

式中,  $\mathbf{x} \in R^n$ ,  $\mathbf{u} \in R^r$ ,  $\mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t]$  是  $\mathbf{x}(t)$ 、 $\mathbf{u}(t)$  和  $t$  的  $n$  维连续向量函数。最优控制问题是寻求最优控制  $\mathbf{u}^*(t)$  及最优状态轨迹  $\mathbf{x}^*(t)$ , 使系统式(6-42)从初始状态  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  转移到终端状态  $\mathbf{x}(t_f)$ , 并使性能泛函  $J$  取极值。

若初始时刻  $t_0$  及始端状态  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  给定,按照终端状态边界条件,讨论以下几种情况。

#### 1. $t_f$ 给定,终端 $\mathbf{x}(t_f)$ 自由

将状态方程式(6-42)写成约束方程形式

$$\mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] - \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0} \quad (6-43)$$

仿照求函数条件极值的拉格朗日乘子法,将等式约束式(6-43)和原有的性能指标结合成增广泛函

$$J' = \Phi[\mathbf{x}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} \{ L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] + \boldsymbol{\lambda}^T(t) \{ \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] - \dot{\mathbf{x}}(t) \} \} dt \quad (6-44)$$

式中,  $\boldsymbol{\lambda}(t) \in R^n$ , 为待定拉格朗日乘子向量函数。显然,不论  $\boldsymbol{\lambda}(t)$  取何种函数,只要  $\mathbf{x}(t)$ 、 $\mathbf{u}(t)$  满足等式约束式(6-43),即满足系统的状态方程式(6-42),则  $J'$  与  $J$  总是等价的。

定义标量函数

$$H[\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t] = L[\mathbf{x}, \mathbf{u}, t] + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}[\mathbf{x}, \mathbf{u}, t] \quad (6-45)$$

为哈密顿(Hamilton)函数,则增广泛函式(6-44)可写为

$$J' = \Phi[\mathbf{x}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} \{ H[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t] - \boldsymbol{\lambda}^T(t) \dot{\mathbf{x}}(t) \} dt \quad (6-46)$$

对式(4-46)右边最后一项进行分部积分,即

$$\int_{t_0}^{t_f} -\lambda^T \dot{x} dt = \int_{t_0}^{t_f} \dot{\lambda}^T x dt - \lambda^T x \Big|_{t_0}^{t_f} \quad (6-47)$$

故增广泛函式(6-44)可写为

$$J' = \Phi[x(t_f), t_f] - \lambda^T(t) x(t) \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \{H[x(t), u(t), \lambda(t), t] + \dot{\lambda}^T(t) x(t)\} dt \quad (6-48)$$

设  $x(t), u(t)$  相对于最优值  $x^*(t), u^*(t)$  的变分分别为  $\delta x$  和  $\delta u$ , 且注意到  $x(t_0) = x_0$ , 则  $\delta x(t_0) = 0$ , 故式(6-48)所示  $J'$  的一阶变分为

$$\delta J' = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x(t_f)} \right)^T \delta x(t_f) - \lambda^T \delta x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)^T \delta x + \left( \frac{\partial H}{\partial u} \right)^T \delta u + \dot{\lambda}^T \delta x \right] dt \quad (6-49)$$

根据定理 6-1, 令  $\delta J' = 0$ , 考虑到  $\delta x, \delta x(t_f)$  及  $\delta u$  的任意性, 则得增广泛函  $J'$  取极值的必要条件, 再由约束方程式(6-43)及定义的哈密顿函数式(6-45), 得在  $t_0$  及始端状态  $x(t_0) = x_0$  给定、 $t_f$  给定、终端  $x(t_f)$  自由情况下, 满足状态方程式(6-42)的性能泛函式(6-41)取极值的必要条件为同时满足

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = f(x, u, t) \quad (\text{状态方程}) \quad (6-50)$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (\text{协态方程}) \quad (6-51)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (\text{控制方程}) \quad (6-52)$$

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial x(t_f)} \quad (\text{横截条件}) \quad (6-53)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (\text{始端边界条件}) \quad (6-54)$$

式(6-50)、式(6-51)和式(6-52)相当于前面的欧拉方程, 式(6-53)为横截条件。式(6-50)为系统状态方程, 其与式(6-51)的右端均为哈密顿函数的适当偏导数, 故式(6-50)和式(6-51)合称为哈密顿正则方程, 简称为正则方程, 式(6-51)则称为伴随方程或协态方程, 相应的拉格朗日乘子向量  $\lambda$  又称为伴随向量或协态向量。式(6-52)表明, 最优控制  $u^*(t)$  使哈密顿函数取驻值, 故式(6-52)称为控制方程。但需要指出, 式(6-52)是在设  $\delta u$  为任意、控制  $u(t)$  无约束的条件下推得的。若  $u(t)$  为容许控制, 存在式(6-3)所示的约束条件, 即  $u(t) \in U$ , 这时  $\delta u$  不为任意, 式(6-52)则不成立, 这一问题的进一步讨论将在 6.4 节进行。正则方程为  $2n$  个一阶微分方程组, 横截条件式(6-53)和已知的初始条件  $x(t_0) = x_0$  (见式(6-54))一起构成解正则方程所需要的  $2n$  个边界条件。

## 2. $t_f$ 给定, 终端 $x(t_f)$ 约束

设终端状态应满足如下目标集等式约束条件

$$N[x(t_f), t_f] = 0 \quad (6-55)$$

式中,  $N \in R^q$ , 即终端状态  $x(t_f)$  沿规定的边界曲线移动。现在存在状态方程约束式(6-43)和终端边界约束式(6-55)这两种类型的等式约束, 为此, 除了引入待定的  $n$  维拉格朗日乘子向量函数  $\lambda(t)$ , 再引入一个待定的乘子向量  $\beta$ , 且  $\beta \in R^q$ , 构造增广泛函

$$J' = \Phi[x(t_f), t_f] + \beta^T N[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} \{L[x(t), u(t), t] + \lambda^T(t) \{f[x(t), u(t), t] - \dot{x}(t)\}\} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \Phi[\mathbf{x}(t_f), t_f] + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{N}[\mathbf{x}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} (H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t) - \boldsymbol{\lambda}^T(t) \dot{\mathbf{x}}(t)) dt \\
&= \Phi[\mathbf{x}(t_f), t_f] + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{N}[\mathbf{x}(t_f), t_f] - \boldsymbol{\lambda}^T(t_f) \mathbf{x}(t_f) + \boldsymbol{\lambda}^T(t_0) \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} (H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t) + \\
&\quad \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T(t) \mathbf{x}(t)) dt
\end{aligned} \tag{6-56}$$

式中, 哈密顿函数  $H[\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t]$  仍由式(6-45)定义。

同样, 设  $\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)$  相对于最优值  $\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)$  的变分分别为  $\delta\mathbf{x}$  和  $\delta\mathbf{u}$ , 且注意到  $\delta\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$ , 故式(6-56)所示  $J'$  的一阶变分为

$$\delta J' = \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}(t_f)} + \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \mathbf{x}(t_f)} \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\lambda}(t_f) \right]^T \delta \mathbf{x}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}} \right)^T \delta \mathbf{x} + \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \delta \mathbf{u} \right\} dt \tag{6-57}$$

令  $\delta J' = 0$ , 并由式(6-42)、式(6-55)及式(6-45), 得当  $t_0$  及始端状态  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  给定、 $t_f$  给定、终端状态  $\mathbf{x}(t_f)$  受目标集等式约束式(6-55)情况下, 满足状态方程式(6-42)的性能泛函式(6-41)取极值的必要条件为同时满足

$$\text{正则方程} \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \tag{6-58}$$

$$\text{控制方程} \quad \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0} \tag{6-59}$$

边界条件与横截条件

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{N}(\mathbf{x}(t_f), t_f) = \mathbf{0} \tag{6-60}$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \frac{\partial \Phi[\mathbf{x}(t_f), t_f]}{\partial \mathbf{x}(t_f)} + \frac{\partial \mathbf{N}^T[\mathbf{x}(t_f), t_f]}{\partial \mathbf{x}(t_f)} \boldsymbol{\beta} \tag{6-61}$$

上述结果表明, 终端约束不改变哈密顿函数, 不影响正则方程, 只影响边界条件。

### 3. $t_f$ 自由, 终端 $\mathbf{x}(t_f)$ 约束

在这一类问题中, 终端时刻  $t_f$  为待求的变量, 且终端状态又受式(6-55)所示的目标集等式约束。显然, 终端时刻  $t_f$  自由时所讨论的问题, 除了  $t_f$  自由之外, 其余与终端时刻给定时所讨论的内容相同。

和  $t_f$  给定时终端状态受约束的最优控制问题一样, 引入待定的拉格朗日乘子向量  $\boldsymbol{\lambda}(t) \in R^n$  和  $\boldsymbol{\beta} \in R^q$ , 将式(6-43)及式(6-55)与性能指标结合成增广泛函(参见式(6-56))

$$\begin{aligned}
J' &= \Phi[\mathbf{x}(t_f), t_f] + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{N}[\mathbf{x}(t_f), t_f] - \boldsymbol{\lambda}^T(t_f) \mathbf{x}(t_f) + \boldsymbol{\lambda}^T(t_0) \mathbf{x}(t_0) + \\
&\quad \int_{t_0}^{t_f} (H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t) + \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T(t) \mathbf{x}(t)) dt
\end{aligned}$$

式中, 哈密顿函数  $H[\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t]$  仍按式(6-45)定义。但与  $t_f$  给定情况不同的是, 现在  $t_f$  也是需要进最优选择的变量。设  $\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t_f$  相对于其最优值  $\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t_f^*$  的变分分别为  $\delta\mathbf{x}, \delta\mathbf{u}, \delta t_f$ , 即

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*(t) + \delta\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t) + \delta\mathbf{u}(t), t_f = t_f^* + \delta t_f \tag{6-62}$$

且有如下近似关系式

$$\delta\mathbf{x}(t_f) = \delta\mathbf{x}(t_f^*) + \dot{\mathbf{x}}(t_f^*) \delta t_f \tag{6-63}$$

考虑到  $\delta\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$ , 则由  $\delta\mathbf{x}, \delta\mathbf{x}(t_f), \delta\mathbf{u}, \delta t_f$  产生的增广泛函  $J'$  的一次变分为

$$\begin{aligned}
\delta J' &= \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t_f} + \boldsymbol{\beta}^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t_f} + H[\mathbf{x}(t_f), \mathbf{u}(t_f), \boldsymbol{\lambda}(t_f), t_f] \right)_{t_f^*} \delta t_f + \\
&\quad \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}(t_f)} + \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \mathbf{x}(t_f)} \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\lambda}(t_f) \right]^T_{t_f^*} \delta \mathbf{x}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f^*} \left\{ \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}} \right)^T \delta \mathbf{x} + \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \delta \mathbf{u} \right\} dt
\end{aligned} \tag{6-64}$$



令  $\delta J' = 0$ , 考虑到  $\delta \mathbf{x}$ 、 $\delta \mathbf{x}(t_f)$ 、 $\delta \mathbf{u}$  及  $\delta t_f$  的任意性, 则得增广泛函  $J'$  取极值的必要条件, 并由式(6-42)、式(6-55)及式(6-45), 得当  $t_0$  及始端状态  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  给定、 $t_f$  自由、终端状态  $\mathbf{x}(t_f)$  受式(6-55)约束情况下, 满足式(6-42)的性能泛函式(6-41)取极值的必要条件为同时满足

$$\text{正则方程} \quad \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (6-65)$$

$$\text{控制方程} \quad \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (6-66)$$

边界条件与横截条件

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{N}[\mathbf{x}(t_f), t_f] = \mathbf{0} \quad (6-67)$$

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial \Phi[\mathbf{x}(t_f), t_f]}{\partial \mathbf{x}(t_f)} + \frac{\partial \mathbf{N}^T[\mathbf{x}(t_f), t_f]}{\partial \mathbf{x}(t_f)} \boldsymbol{\beta} \quad (6-68)$$

$$H[\mathbf{x}(t_f), \mathbf{u}(t_f), \lambda(t_f), t_f] + \frac{\partial \Phi[\mathbf{x}(t_f), t_f]}{\partial t_f} + \boldsymbol{\beta}^T \frac{\partial \mathbf{N}[\mathbf{x}(t_f), t_f]}{\partial t_f} = 0 \quad (6-69)$$

式中,  $H[\mathbf{x}(t_f), \mathbf{u}(t_f), \lambda(t_f), t_f]$  为哈密顿函数  $H$  在最优轨迹终端处的值。

比较式(6-58)~式(6-61)与式(6-65)~式(6-69)可见, 当  $t_f$  自由时, 在必要条件中只增加了一个标量方程式(6-69), 用以求解最优终端时刻。

**【例 6-3】** 设被控系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

设初始状态为  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ , 终端状态约束曲线为  $x_1(1) + x_2(1) - 1 = 0$ , 求使性能泛函  $J = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(t) dt$  取极小时的最优控制  $u^*(t)$  和最优轨迹  $\mathbf{x}^*(t)$ 。

**解** 系统为 2 阶, 故引入 2 维拉格朗日乘子向量  $\lambda$ , 构造哈密顿函数

$$H = L + \lambda^T f = \frac{1}{2} u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$$

由性能泛函取极值的必要条件, 得

$$\text{正则方程} \quad \dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1 \quad (\text{协态方程})$$

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = x_2, \dot{x}_2 = \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} = u \quad (\text{状态方程})$$

$$\text{控制方程} \quad \frac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda_2 = 0$$

它们的通解为

$$\lambda_1 = C_1, \lambda_2 = -C_1 t + C_2$$

$$u = -\lambda_2$$

$$x_1 = \frac{1}{6} C_1 t^3 - \frac{1}{2} C_2 t^2 + C_3 t + C_4, x_2 = \frac{1}{2} C_1 t^2 - C_2 t + C_3$$

边界条件与横截条件

$$x_1(0) = 0, x_2(0) = 0$$

$$x_1(1) + x_2(1) - 1 = 0$$

$$\lambda_1(1) = \frac{\partial N}{\partial x_1(1)}\beta = \beta, \lambda_2(1) = \frac{\partial N}{\partial x_2(1)}\beta = \beta$$

代入通解,得

$$C_1 = \beta, C_2 = 2\beta, C_3 = 0, C_4 = 0, \beta = -\frac{3}{7}$$

则最优控制

$$u^*(t) = -\frac{3}{7}t + \frac{6}{7}$$

最优轨迹

$$x_1^*(t) = -\frac{1}{14}t^3 + \frac{3}{7}t^2, x_2^*(t) = -\frac{3}{14}t^2 + \frac{6}{7}t$$

## 6.4 极小值原理

如前所述,在用经典变分法求解最优控制问题时,假定控制变量  $u(t)$  不受任何限制,即容许控制集合可以看成整个  $r$  维控制空间开集,控制变分  $\delta u$  是任意的,同时还要求哈密顿函数  $H$  对  $u$  连续可微,在这种情况下,应用变分法求解最优控制问题是行之有效的。

但是在大多数情况下,控制量的大小总是受限制的,即

$$|u_i| \leq a_i \quad (i=1, 2, \dots, r) \quad (6-70)$$

这时容许控制  $u(t)$  的集合是一个  $r$  维有界闭集。一般可用如下不等式表示容许控制  $u(t)$  的闭集约束条件,即

$$g[x(t), u(t), t] \geq 0 \quad (6-71)$$

当容许控制集合  $u(t)$  属于有界闭集时,控制变分  $\delta u$  在容许控制集合边界上不能任意,最优控制的必要条件  $\partial H / \partial u = 0$  亦不满足,则不能用经典变分法处理。

另外,应用经典变分法求解最优控制问题还要求哈密顿函数  $H$  对控制  $u(t)$  连续可微,这一条件过于严格。例如,燃料控制系统的性能泛函常取

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{j=1}^k |u_j| dt \quad (6-72)$$

的形式,其哈密顿函数  $H$  关于  $u(t)$  的偏导数不存在,因此,最省燃料这类最优控制问题无法应用经典变分法解决。

针对经典变分法应用条件过严的局限性,前苏联学者庞特里亚金等发展了经典变分原理,在 1956—1958 年间创立了极小值原理。极小值原理由变分法引伸而来,它的结论与经典变分法的结论有许多相似之处,这一方法当控制变量  $u(t)$  受闭集约束时是行之有效的,并且不要求哈密顿函数  $H$  对  $u(t)$  连续可微,是控制变量  $u(t)$  受限制时求解最优控制问题的有力工具,而且极小值原理也可用于解决控制不受约束的最优控制问题,因此,其是解决最优控制问题的更一般的方法。

**定理 6-4(极小值原理)** 设系统状态方程为

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t] \quad (6-73)$$

初始条件为

$$x(t_0) = x_0 \text{ 固定}, t_0 \text{ 固定} \quad (6-74)$$

控制约束为

$$u(t) \in U, g[x(t), u(t), t] \geq 0 \quad (6-75)$$

终端约束为

$$N[x(t_f), t_f] = 0, t_f \text{ 自由} \quad (6-76)$$

式中,  $x(t)$  为  $n$  维状态向量;控制  $u(t)$  属于  $r$  维空间中的有界闭集  $U$ , 受不等式 (6-75) 约束;  $g$  为  $l$  维连续可微向量函数,  $l \leq r$ ;  $N$  为  $q$  维连续可微向量函数,  $q \leq n$ 。

性能泛函为

$$J = \Phi[\mathbf{x}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] dt \quad (6-77)$$

式中,  $\Phi$  和  $L$  为连续可微的标量函数;  $t_f$  为待定的最优终端时刻。

取哈密顿函数为

$$H = L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \quad (6-78)$$

式中,  $\boldsymbol{\lambda}(t)$  为待定的  $n$  维伴随向量函数(拉格朗日乘子向量)。则实现最优控制的必要条件为: 最优控制  $\mathbf{u}^*(t)$ 、最优轨迹  $\mathbf{x}^*(t)$  和最优伴随向量  $\boldsymbol{\lambda}^*(t)$  必须满足下列一组方程

(1) 正则方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \quad (6-79)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{g}^T}{\partial \mathbf{x}} \boldsymbol{\Gamma} \quad (6-80)$$

式中,  $\boldsymbol{\Gamma}$  是与时间  $t$  无关的  $l$  维拉格朗日乘子向量(维数与  $\mathbf{g}$  相同)。若  $\mathbf{g}$  中不包含  $\mathbf{x}$ , 则有

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \quad (6-81)$$

(2) 横截条件及边界条件

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}(t_f)} + \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \mathbf{x}(t_f)} \boldsymbol{\beta} \right]_{t=t_f} \quad (6-82)$$

$$\left[ H + \frac{\partial \Phi}{\partial t_f} + \boldsymbol{\beta}^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t_f} \right]_{t=t_f} = 0 \quad (6-83)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (6-84)$$

$$\mathbf{N}[\mathbf{x}(t_f), t_f] = \mathbf{0} \quad (6-85)$$

式中,  $\boldsymbol{\beta} \in R^q$  为待定的拉格朗日乘子向量。

(3) 在最优轨迹  $\mathbf{x}^*(t)$  上, 与最优控制  $\mathbf{u}^*(t)$  相对应的哈密顿函数  $H$  取绝对极小值, 即

$$H[\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \mathbf{u}^*, t] = \min_{\mathbf{u} \in U} H[\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \mathbf{u}, t] \quad (6-86)$$

且沿最优轨迹, 有

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = -\frac{\partial \mathbf{g}^T}{\partial \mathbf{u}} \boldsymbol{\Gamma} \quad (6-87)$$

关于定理 6-4 作如下几点说明:

(1) 定理给出的正则方程(式(6-79)~式(6-81))及极小值条件式(6-86)对各类最优控制问题普遍适用, 且与边界条件形式或终端时刻是否自由无关。式(6-82)给出终端状态受约束时最优伴随向量终值  $\boldsymbol{\lambda}^*(t_f)$  应满足的条件; 式(6-84)给出始点边界条件; 式(6-85)则给出终端状态约束条件。这 3 组方程正是确定正则方程的  $2n$  个积分常数和  $q$  维待定的拉格朗日乘子向量  $\boldsymbol{\beta}$  所必需的。式(6-83)则用于  $t_f$  自由时确定最优终端时刻  $t_f^*$ 。

(2) 极小值条件式(6-86)表明, 最优控制  $\mathbf{u}^*(t)$  使哈密顿函数  $H$  取全局最小, 极小值原理因此而得名。与经典变分法相比, 极小值原理放宽了应用条件, 式(6-87)对通常的控制约束均适用, 且不要求哈密顿函数  $H$  对控制  $\mathbf{u}(t)$  有可微性。

当满足经典变分法应用条件时, 其控制方程  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}$  是式(6-87)的一种特别容易计算的情况,

即用控制方程  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}$  求解控制向量无界时的泛函极值问题只是极小值原理应用的一个特例。

(3) 极小值原理只给出了最优控制的必要条件, 并非充分条件。如果从问题的物理背景和工程实际可判断最优解是存在的, 且由极小值原理求出的控制唯一, 则该控制即为最优控制。

【例 6-4】 设系统的状态方程为

$$\dot{x} = x - u, x(0) = 5$$

控制约束为  $\frac{1}{2} \leq u \leq 1$ , 求使性能指标  $J = \int_0^1 (x + u) dt$  为最小的最优控制  $u^*(t)$  及最优轨线  $x^*(t)$ , 并求出性能泛函的最小值。

解 这是一个  $t_0, x(t_0), t_f$  均给定、终端状态  $x(t_f)$  自由、控制受闭集约束的最优控制问题。

(1) 根据状态方程、性能指标写出该问题的哈密顿函数

$$H = L + \lambda f = x + u + \lambda(x - u) = x(1 + \lambda) + u(1 - \lambda)$$

(2) 由哈密顿函数及控制约束条件建立极值条件

应用极小值条件式(6-86), 即

$$H[x^*, \lambda^*, u^*, t] = \min_{u \in U} H[x^*, \lambda^*, u, t]$$

根据极小值原理, 求  $H$  极小等效于求泛函极小。故应选取  $u^*(t)$  使  $H$  极小, 这只要使  $u(1 - \lambda)$  为极小即可。 $u$  的上界为 1, 下界为  $\frac{1}{2}$ , 因此, 当  $\lambda > 1$  时, 应取  $u^*(t) = 1$  (上界); 当  $\lambda < 1$  时, 应取  $u^*(t) = \frac{1}{2}$  (下界)。

(3) 由哈密顿函数建立正则方程

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = x - u \quad (\text{状态方程}), \quad \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -(1 + \lambda) \quad (\text{协态方程})$$

(4) 解方程

先解协态方程, 得通解为  $\lambda = -1 + Ce^{-t}$

由终端横截条件, 得  $\lambda(t_f) = \lambda(1) = 0$ , 代入上式确定积分常数  $C = e$ , 所以

$$\lambda^*(t) = e^{1-t} - 1$$

由极值条件知, 当  $\lambda^*(t_c) = 1$  时  $u^*(t)$  切换,  $t_c$  为切换时间。故令  $\lambda^*(t_c) = e^{1-t_c} - 1 = 1$ ,  $t_c = 1 - \ln 2 \approx 0.307$ , 则最优控制为

$$\begin{cases} \text{当 } \lambda > 1, \text{ 对应 } 0 \leq t < 0.307, u^* = 1 \\ \text{当 } \lambda < 1, \text{ 对应 } 0.307 \leq t \leq 1, u^* = \frac{1}{2} \end{cases}$$

将最优控制  $u^*(t)$  代入状态方程, 即: 当  $0 \leq t < 0.307$  时,  $u^* = 1$ , 有  $\dot{x} = x - 1$ , 通解为  $x = 1 + C_1 e^t$ , 由  $x(0) = 5$  确定  $C_1 = 4$ , 故  $x^*(t) = 4e^t + 1$ ; 当  $0.307 \leq t \leq 1$  时,  $u^* = \frac{1}{2}$ , 有  $\dot{x} = x - \frac{1}{2}$ , 通解为  $x = \frac{1}{2} + C_2 e^t$ , 考虑第一段的终值  $x(0.307) = 6.438$  为第二段初值, 由此确定  $C_2 = 4.368$ , 故  $x^*(t) = 4.368e^t + 0.5$ 。

(5) 求  $J^* = J(u^*)$

$$\begin{aligned} J^* &= \int_0^1 (x^* + u^*) dt = \int_0^{0.307} (x + 1) dt + \int_{0.307}^1 \left(x + \frac{1}{2}\right) dt \\ &= \int_0^{0.307} (4e^t + 2) dt + \int_{0.307}^1 (4.368e^t + 1) dt = 8.68 \end{aligned}$$

本例所求最优解曲线如图 6-3 所示。

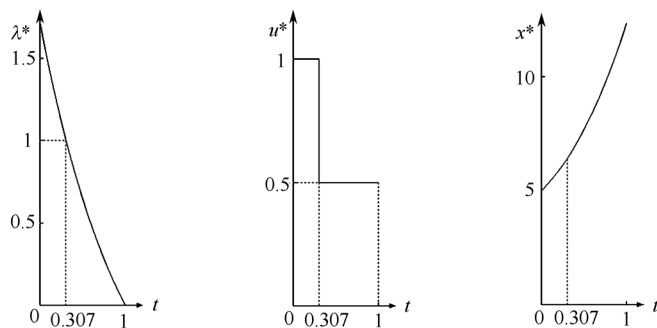


图 6-3 例 6-4 的最优解

## 6.5 动态规划法

动态规划是美国数学家贝尔曼于 20 世纪 50 年代末为研究多级决策提出的,又称为贝尔曼规划。动态规划法是一种分段(步)最优化方法,其中心思想是将一个多级决策问题化为多个一级决策问题,使求解简化,它既可用于求解约束条件下的函数极值问题,也可用于求解约束条件下的泛函极值问题。与极小值原理一样,动态规划法是控制变量限制在一定闭集内求解最优控制问题的有效数学方法。本节先介绍动态规划中的最优性原理,然后讨论离散系统及连续系统的最优控制问题。

### 6.5.1 最优性原理

动态规划是解决多段决策过程优化问题的一种强有力的工具。所谓多段决策过程,是指把一个过程按时间或空间顺序分为若干段(步),然后给每一段(步)做出“决策”,以使整个过程取得最优的效果。

现以选择随机路线的最短路径为例说明动态规划的基本思想。

**【例 6-5】** 一辆汽车从 A 城出发到 B 城,途中有 3 条河流,每条河上各有两座桥  $P_i, Q_i$  ( $i=1,2,3$ ),如图 6-4 所示,各段路程的距离相应标在图上(单位:km),求从 A 城到 B 城的最短路线。

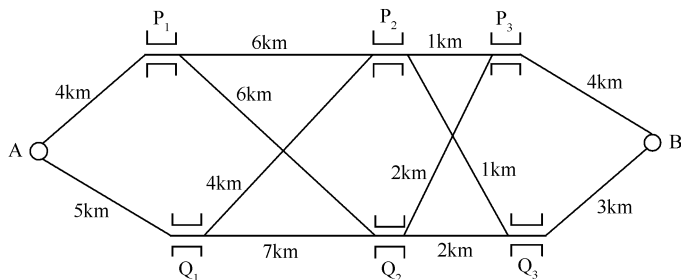


图 6-4 随机路线问题

**解** 显然,行车路程可分 4 段,第 1 段从 A 到第一条河流,是过桥  $P_1$  还是过桥  $Q_1$ ;第 2 段从  $P_1$  或  $Q_1$  出发是过  $P_2$  还是过  $Q_2$ ;第 3 段是从  $P_2$  或  $Q_2$  出发是过  $P_3$  还是过  $Q_3$ ;第 4 段是由  $P_3$  或  $Q_3$  到 B,这是一个 4 步决策问题。

解决该问题的最简单办法就是穷举法,即将所有可能的行车路线都计算出来,然后再进行比较。本例中共有 8 条可能路线,列表计算见表 6-1。

表 6-1 随机路线问题的列表计算

路 线	距离(km)	路 线	距离(km)
A P <sub>1</sub> P <sub>2</sub> P <sub>3</sub> B	4+6+1+4=15	AP <sub>1</sub> P <sub>2</sub> Q <sub>3</sub> B	4+6+1+3=14
AP <sub>1</sub> Q <sub>2</sub> P <sub>3</sub> B	4+6+2+4=16	A P <sub>1</sub> Q <sub>2</sub> Q <sub>3</sub> B	4+6+2+3=15
AQ <sub>1</sub> Q <sub>2</sub> Q <sub>3</sub> B	5+7+2+3=17	AQ <sub>1</sub> Q <sub>2</sub> P <sub>3</sub> B	5+7+2+4=18
AQ <sub>1</sub> P <sub>2</sub> P <sub>3</sub> B	5+4+1+4=14	AQ <sub>1</sub> P <sub>2</sub> Q <sub>3</sub> B	5+4+1+3=13

从表 6-1 的计算结果进行比较可得,从 A 城到 B 城的最短路线为 AQ<sub>1</sub>P<sub>2</sub>Q<sub>3</sub>B, 距离为 13km,但采用穷举法需要进行的加法运算次数较多。由表 6-1 计算可知,每条路线均要相加 3 次,8 条路线总共要进行 24 次相加计算。这只是一个 4 步决策问题,若是  $n$  步决策问题,则相应要加  $(n-1)2^{n-1}$  次,可见随  $n$  增大,计算工作量急剧增加。

应用动态规划法可显著降低计算量。动态规划法遵循以下最优性原则:即所选择的最优路线必须保证其后部子路线是最优的。图 6-4 中,若 AQ<sub>1</sub>P<sub>2</sub>Q<sub>3</sub>B 是所求最优路线,那么从这条路线上任一中间点至终点之间的一段路线必定也是最优的。根据这一最优性原理,采用动态规划法求解最短路线问题的思路是从终点开始的,按行程最短为目标,逐段向前逆推,依次计算出各站至终点的行程最短值,并据此决策出每一站的最优路线。如在图 6-4 中,从终点 B 开始逆推,即先从最后一段(第 4 段)开始,分别计算 P<sub>3</sub> 和 Q<sub>3</sub> 到 B 的最短里程。在图 6-4 上,从 P<sub>3</sub> 出发到 B 的路线只有 P<sub>3</sub>B 这一条,里程为 4 km,故从 P<sub>3</sub> 出发到 B 的最优决策为 P<sub>3</sub>B,最短里程为

$$J^*(P_3) = P_3B = 4$$

同理

$$J^*(Q_3) = Q_3B = 3$$

接着向前逆推至倒数第 2 段,分别计算 P<sub>2</sub> 和 Q<sub>2</sub> 到 B 的最短里程。从 P<sub>2</sub> 到 B 有两种决策:其一,经 P<sub>3</sub> 到 B,即路线为 P<sub>2</sub>P<sub>3</sub>B,里程为  $J[P_2] = P_2P_3 + J^*[P_3] = 1 + 4 = 5$ ;其二,经 Q<sub>3</sub> 到 B,即路线为 P<sub>2</sub>Q<sub>3</sub>B,里程为  $J[P_2] = P_2Q_3 + J^*[Q_3] = 1 + 3 = 4$ 。

可见,从 P<sub>2</sub> 出发到 B 的最优决策为 P<sub>2</sub>Q<sub>3</sub>B,最短里程为

$$J^*[P_2] = P_2Q_3 + J^*[Q_3] = 4$$

同理,从 Q<sub>2</sub> 出发到 B 的最短里程为

$$J^*[Q_2] = \min \left\{ \begin{array}{l} Q_2Q_3 + J^*[Q_3] \\ Q_2P_3 + J^*[P_3] \end{array} \right\} = \min \left\{ \begin{array}{l} 2+3 \\ 2+4 \end{array} \right\} = 5 = Q_2Q_3 + J^*[Q_3]$$

最优决策为 Q<sub>2</sub>Q<sub>3</sub>B。

接着向前逆推至倒数第 3 段,分别计算 P<sub>1</sub> 和 Q<sub>1</sub> 到 B 的最短里程。为计算 P<sub>1</sub> 到 B 的最短里程,只需比较以下两种路线:

其一,P<sub>1</sub>P<sub>2</sub>Q<sub>3</sub>B,里程为  $J[P_1] = P_1P_2 + J^*[P_2] = 6 + 4 = 10$ ;

其二,P<sub>1</sub>Q<sub>2</sub>Q<sub>3</sub>B,里程为  $J[P_1] = P_1Q_2 + J^*[Q_2] = 6 + 5 = 11$ 。

可见,从 P<sub>1</sub> 出发到 B 的最优决策为 P<sub>1</sub>P<sub>2</sub>Q<sub>3</sub>B,最短里程为

$$J^*[P_1] = P_1P_2 + J^*[P_2] = 10$$

为计算 Q<sub>1</sub> 到 B 的最短里程,只需比较以下两种路线:

其一,Q<sub>1</sub>P<sub>2</sub>Q<sub>3</sub>B,里程为  $J[Q_1] = Q_1P_2 + J^*[P_2] = 4 + 4 = 8$ ;

其二,Q<sub>1</sub>Q<sub>2</sub>Q<sub>3</sub>B,里程为  $J[Q_1] = Q_1Q_2 + J^*[Q_2] = 7 + 5 = 12$ 。

可见,从 Q<sub>1</sub> 出发到 B 的最优决策为 Q<sub>1</sub>P<sub>2</sub>Q<sub>3</sub>B,最短里程为

$$J^*[Q_1] = Q_1P_2 + J^*[P_2] = 8$$

最后,向前逆推至第 1 段,计算起点 A 到终点 B 的最短里程,为此,只需比较以下两种路线:

其一,  $AP_1P_2Q_3B$ , 里程为  $J[A] = AP_1 + J^*[P_1] = 4 + 10 = 14$ ;

其二,  $AQ_1P_2Q_3B$ , 里程为  $J[A] = AQ_1 + J^*[Q_1] = 5 + 8 = 13$ 。

因此, 从 A 城到 B 城的最短路线为  $AQ_1P_2Q_3B$ , 最短里程为 13km, 其结果与穷举法一致。但本例, 穷举法要做 24 次加法和 7 次比较, 而采用动态规划法仅需做 10 次加法和 6 次比较。以上采用动态规划法求最优路线的实质在于将一个 4 级决策问题简化成 4 个相同的单级决策问题, 从而简化了问题的求解。

事实上, 对于多阶段、多决策问题, 动态规划法的优点更为突出。对  $n$  级决策问题, 穷举法要作  $(n-1)2^{n-1}$  次加法, 而动态规划法只需作  $4(n-2)+2$  次加法。以 10 级决策 ( $n=10$ ) 为例, 用穷举法需作 4608 次加法, 而动态规划法只需作 34 次加法。

动态规划法的特点总结如下:

(1) 最优路线的整体决策是从终点开始, 把整个过程分成  $N$  段的多段过程, 采用逆推方法, 通过计算、比较各段性能指标, 在每一段决策时, 不只考虑本级性能指标的最优, 而是同时考虑本级和以后各级的总性能指标最优, 它是根据“全局”最优来做出本级决策的, 逐段决策、逐步延伸完成系统的最优决策。

(2) 动态规划法体现了多段最优决策的一个重要规律, 即所谓最优性原理。最优性原理是动态规划的核心, 其可表述为: 多级决策过程的最优策略具有这样的性质——不论初始级、初始状态与初始决策如何, 当把其中任何一级和状态再作为初始级和初始状态时, 余下的决策对此必定构成一个最优策略。从最优轨线的角度看, 最优性原理可表述为: 最优轨线的一部分必为最优轨线。

## 6.5.2 离散系统的动态规划

设离散系统的状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)] \quad k=0, 1, \dots, N-1 \quad (6-88)$$

式中,  $\mathbf{x}(k) \in R^n$  为  $n$  维状态向量,  $\mathbf{u}(k) \in U \subset R^r$  为  $r$  维控制空间中容许控制域内的控制向量,  $\mathbf{f}(\cdot)$  是  $n$  维向量函数。设系统的初始状态为  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ , 控制约束为  $\mathbf{g}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)] \leq \mathbf{0}$ , 系统的性能泛函为

$$J_N = \Phi[\mathbf{x}(N)] + \sum_{k=0}^{N-1} L[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)] \quad (6-89)$$

式中,  $J$  的下标  $N$  表示由  $\mathbf{u}(0)$  到  $\mathbf{u}(N-1)$  控制  $N$  步。现在的问题是寻求一个最优控制序列  $\{\mathbf{u}^*(k)\} (k=0, 1, \dots, N-1)$ , 使性能泛函式 (6-89) 最小。

由式 (6-89), 并逐次使用式 (6-88) 可以看出,  $J_N$  只依赖于  $\mathbf{x}(0), \mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \dots, \mathbf{u}(N-1)$ 。若已求出最优控制序列  $\{\mathbf{u}^*(k)\} (k=0, 1, \dots, N-1)$ , 则  $J_N$  的最小值  $\min J_N$  只与初始状态  $\mathbf{x}(0)$  有关, 并将其记为  $J_N^*[\mathbf{x}(0)]$ 。

根据最优性原理, 对于一个  $N$  级最优决策过程, 不论第一级控制向量  $\mathbf{u}(0)$  怎样选取, 余下的控制序列  $\{\mathbf{u}(k)\} (k=0, 1, \dots, N-1)$ , 对于由  $\mathbf{x}(0)$  和  $\mathbf{u}(0)$  所形成的状态  $\mathbf{x}(1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(0), \mathbf{u}(0)]$  来说, 一定是  $N-1$  级最优控制序列, 并以  $J_{N-1}^*[\mathbf{x}(1)]$  表示这一以  $\mathbf{x}(1)$  为初始状态的  $N-1$  级决策过程问题的最优性能指标。那么, 对初始状态为  $\mathbf{x}(0)$  的  $N$  级最优决策过程的最优性能泛函  $J_N^*[\mathbf{x}(0)]$ , 则应满足动态规划基本方程

$$J_N^*[\mathbf{x}(0)] = \min_{\mathbf{u}(0)} \{L[\mathbf{x}(0), \mathbf{u}(0)] + J_{N-1}^*[\mathbf{x}(1)]\} \quad (6-90)$$

式中,  $\mathbf{x}(1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(0), \mathbf{u}(0)]$ 。

式(6-90)给出了  $J_N^*[\mathbf{x}(0)]$  与  $J_{N-1}^*[\mathbf{x}(1)]$  之间的递推关系。事实上,可将任何一级的状态看成从该级开始的一个多级过程的初始状态,则由式(6-90)依次类推,可得更一般的动态规划递推方程

$$J_{N-i}^*[\mathbf{x}(i)] = \min_{u(i)} \{L[\mathbf{x}(i), \mathbf{u}(i)] + J_{N-(i+1)}^*[\mathbf{x}(i+1)]\} \quad (6-91)$$

$$\text{式中} \quad \mathbf{x}(i+1) = f[\mathbf{x}(i), \mathbf{u}(i)] \quad (6-92)$$

$J_{N-i}^*[\mathbf{x}(i)]$  是以  $\mathbf{x}(i)$  为初始状态的  $N-i$  级决策过程问题的最优性能泛函;  $J_{N-(i+1)}^*[\mathbf{x}(i+1)]$  是以  $\mathbf{x}(i+1)$  为初始状态的  $N-(i+1)$  级决策过程问题的最优性能泛函,  $\mathbf{x}(i+1)$ 、 $\mathbf{x}(i)$  满足式(6-92)。为了将式(6-91)写成统一形式,令  $J_0^*(\mathbf{x}_N) = \Phi[\mathbf{x}(N)]$ 。

应用动态规划递推方程,可从末级开始向前倒推,将一个  $N$  级决策(或控制)问题转换为  $N$  个一级决策(或控制)问题,对这些一级最优化问题逐个求解,依次得到最优解

$$\mathbf{u}(N-1), \mathbf{u}(N-2), \dots, \mathbf{u}(1), \mathbf{u}(0)$$

应该指出,在一般情况下,动态规划递推方程式(6-91)难以求得解析解。

### 6.5.3 连续系统的动态规划

动态规划虽然主要用于离散时间系统,但也可推广应用到连续时间系统的最优控制。下面介绍求解连续系统最优控制的动态规划法。应用动态规划的最优性原理,可推导出使连续系统性能泛函为极小应满足的条件——哈密顿-雅可比方程,解此偏微分方程即可得到最优控制  $\mathbf{u}^*(t)$ 。

设连续系统状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = f[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \quad (6-93)$$

式中,  $\mathbf{x}(t)$  是  $n$  维状态向量,  $f[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t]$  是  $n$  维连续向量函数,  $\mathbf{u}(t)$  是  $r$  维控制向量且受到限制,即  $\mathbf{u}(t) \in U$ ,  $U$  为  $r$  维空间中的一个闭子集。设初始状态为  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , 求最优控制  $\mathbf{u}^*(t)$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ , 使性能泛函

$$J = \Phi[\mathbf{x}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] dt \quad (6-94)$$

为最小。

根据动态规划的最优性原理,对于区间  $[t_0, t_f]$  中的任一  $t$ , 从  $\mathbf{x}(t)$  出发,相应于最优控制  $\mathbf{u}^*$  及最优轨线  $\mathbf{x}^*$  的最优性能泛函为

$$J^*[\mathbf{x}(t), t] = \min_{u \in U} \left\{ \Phi[\mathbf{x}(t_f), t_f] + \int_t^{t_f} L[\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau] d\tau \right\} \quad (6-95)$$

设将区间  $[t, t_f]$  最优过程分成两段:从  $t$  到  $t+\Delta t$  及从  $t+\Delta t$  到  $t_f$ , 其中  $\Delta t \rightarrow 0$ , 则有

$$J^*[\mathbf{x}(t), t] = \min_{u \in U} \left\{ \Phi[\mathbf{x}(t_f), t_f] + \int_t^{t+\Delta t} L[\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau] d\tau + \int_{t+\Delta t}^{t_f} L[\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau] d\tau \right\} \quad (6-96)$$

根据最优性原理,从  $t+\Delta t$  到  $t_f$  这一段子过程的最优性能泛函为

$$J^*[\mathbf{x}(t+\Delta t), t+\Delta t] = \min_{u \in U} \left\{ \Phi[\mathbf{x}(t_f), t_f] + \int_{t+\Delta t}^{t_f} L[\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau] d\tau \right\} \quad (6-97)$$

又  $\Delta t \rightarrow 0$ , 则有

$$\int_t^{t+\Delta t} L[\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau] d\tau \approx L[\mathbf{x}, \mathbf{u}, t] \Delta t \quad (6-98)$$

将式(6-97)、式(6-98)代入式(6-96)得



$$J^*(\mathbf{x}(t), t) = \min_{u \in U} \{L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t]\Delta t + J^*[\mathbf{x}(t+\Delta t), t+\Delta t]\} \quad (6-99)$$

设  $J^*[\mathbf{x}(t), t]$  存在且有连续偏导数, 将  $J^*[\mathbf{x}(t+\Delta t), t+\Delta t]$  泰勒展开并取一次近似, 得

$$J^*[\mathbf{x}(t+\Delta t), t+\Delta t] \approx J^*[\mathbf{x}(t), t] + \left[ \frac{\partial J^*[\mathbf{x}(t), t]}{\partial \mathbf{x}(t)} \right]^T \frac{d\mathbf{x}}{dt} \Delta t + \frac{\partial J^*[\mathbf{x}(t), t]}{\partial t} \Delta t \quad (6-100)$$

将式(6-100)代入式(6-99)并考虑到状态方程式(6-93)得

$$\begin{aligned} J^*[\mathbf{x}(t), t] &= \min_{u \in U} \left\{ L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t]\Delta t + J^*[\mathbf{x}(t), t] + \left[ \frac{\partial J^*[\mathbf{x}(t), t]}{\partial \mathbf{x}(t)} \right]^T \frac{d\mathbf{x}}{dt} \Delta t + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial J^*[\mathbf{x}(t), t]}{\partial t} \Delta t \right\} \\ &= J^*[\mathbf{x}(t), t] + \frac{\partial J^*[\mathbf{x}(t), t]}{\partial t} \Delta t + \min_{u \in U} \left\{ L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t]\Delta t + \right. \\ &\quad \left. \left[ \frac{\partial J^*[\mathbf{x}(t), t]}{\partial \mathbf{x}(t)} \right]^T \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t]\Delta t \right\} \end{aligned} \quad (6-101)$$

整理式(6-101)得

$$-\frac{\partial J^*[\mathbf{x}(t), t]}{\partial t} = \min_{u \in U} \left\{ L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] + \left[ \frac{\partial J^*[\mathbf{x}(t), t]}{\partial \mathbf{x}(t)} \right]^T \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \right\} \quad (6-102)$$

式(6-102)称为连续系统动态规划基本方程或贝尔曼方程, 其是哈密顿-雅可比方程的一种形式, 解此方程可求得使式(6-94)所示性能泛函  $J$  为极小的最优控制  $u^*(t)$ , 其边界条件可由性能指标式(6-94)求出, 即

$$J^*[\mathbf{x}(t_f), t_f] = \Phi[\mathbf{x}(t_f), t_f] \quad (6-103)$$

应该指出, 式(6-102)是泛函与偏微分方程的混合形式, 求解困难。

若构造哈密顿函数

$$\begin{aligned} H[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t] &= L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] + \left[ \frac{\partial J^*[\mathbf{x}(t), t]}{\partial \mathbf{x}(t)} \right]^T \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \\ &= L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] + \boldsymbol{\lambda}^T(t) \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \end{aligned} \quad (6-104)$$

式中

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \frac{\partial J^*[\mathbf{x}(t), t]}{\partial \mathbf{x}(t)} \quad (6-105)$$

则式(6-102)可写为

$$-\frac{\partial J^*[\mathbf{x}(t), t]}{\partial t} = \min_{u \in U} H[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t] \quad (6-106)$$

当控制向量  $\mathbf{u}$  不受限制时, 如果  $\mathbf{u}^*(t)$  是最优控制, 则由式(6-106)得

$$-\frac{\partial J^*[\mathbf{x}(t), t]}{\partial t} = H[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t] \quad (6-107)$$

【例 6-6】 设系统状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

初始状态为  $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $u(t)$  不受限制, 性能泛函为

$$J = \int_0^\infty \left( 2x_1^2 + \frac{1}{2}u^2 \right) dt$$

试求最优控制  $u^*(t)$ , 使性能泛函  $J$  为最小。

解 构造所求问题的哈密顿函数

$$\begin{aligned} H &= L + \left[ \frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \mathbf{f} = 2x_1^2 + \frac{1}{2}u^2 + \left[ \frac{\partial J^*}{\partial x_1} \quad \frac{\partial J^*}{\partial x_2} \right] \begin{bmatrix} x_2 \\ u \end{bmatrix} \\ &= 2x_1^2 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{\partial J^*}{\partial x_1}x_2 + \frac{\partial J^*}{\partial x_2}u \end{aligned}$$

根据哈密顿-雅可比方程

$$-\frac{\partial J^*}{\partial t} = \min_u H = \min_u \left\{ 2x_1^2 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{\partial J^*}{\partial x_1}x_2 + \frac{\partial J^*}{\partial x_2}u \right\}$$

由于  $u$  不受限制, 则可从  $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$  即  $u + \frac{\partial J^*}{\partial x_2} = 0$ , 求得使哈密顿函数取最小值的最优控制

$$u^* = -\frac{\partial J^*}{\partial x_2}$$

将其代入到哈密顿函数中, 得

$$H^* = 2x_1^2 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{\partial J^*}{\partial x_1}x_2 + \frac{\partial J^*}{\partial x_2}u = 2x_1^2 + \frac{\partial J^*}{\partial x_1}x_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial J^*}{\partial x_2}\right)^2$$

因为被控系统是线性定常系统, 并且性能泛函的被积函数不是时间的显函数、积分上限为无穷大, 故  $\frac{\partial J^*}{\partial t} = 0$ 。因而由式(6-107)得

$$2x_1^2 + \frac{\partial J^*}{\partial x_1}x_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial J^*}{\partial x_2}\right)^2 = 0$$

为解此偏微分方程, 设  $J^* = a_1x_1^2 + 2a_2x_1x_2 + a_3x_2^2$  满足方程, 代入得

$$(1 - a_2^2)x_1^2 + (a_1 - 2a_2a_3)x_1x_2 + (a_2 - a_3^2)x_2^2 = 0$$

令

$$1 - a_2^2 = 0, a_1 - 2a_2a_3 = 0, a_2 - a_3^2 = 0$$

解得

$$a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 1$$

则

$$J^*[\mathbf{x}(t)] = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$

最优控制为

$$u^* = -\frac{\partial J^*[\mathbf{x}(t)]}{\partial x_2} = -(2x_1 + 2x_2) = \begin{bmatrix} -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

可见, 最优控制具有状态线性反馈的形式。实际上, 利用连续动态规划法综合最优控制的一个主要特点是: 通过哈密顿-雅可比方程求出的最优控制是状态向量  $\mathbf{x}(t)$  的函数, 易于实现系统闭环最优控制。

## 6.6 线性二次型最优调节器

如果系统是线性的, 性能泛函是状态变量和(或)控制变量的二次型函数的积分, 则这样的最优控制问题称为线性二次型最优控制问题, 简称线性二次型。由于二次型性能指标具有鲜明的物理意义, 它代表了大量工程实际问题中提出的性能指标要求, 并且在数学处理上比较简单, 求得的控制规律是状态变量的线性函数, 易于通过状态线性反馈实现闭环最优控制, 便于工程实现, 因而在实际工程问题中得到了广泛应用。

### 6.6.1 线性二次型最优控制问题的提法

设线性系统的状态空间描述为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (6-108)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t)$$

式中,  $\mathbf{x} \in R^n, \mathbf{u} \in R^r, \mathbf{y} \in R^m, \mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t)$  和  $\mathbf{C}(t)$  分别是  $n \times n, n \times r$  和  $m \times n$  维矩阵。

定义关于状态向量和控制向量的二次型性能指标为

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{Q}_f \mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t)] dt \quad (6-109)$$

式中,  $\mathbf{Q}_f$  和  $\mathbf{Q}(t)$  均为  $n \times n$  维半正定(或正定)对称矩阵,  $\mathbf{R}(t)$  是  $r \times r$  维正定对称矩阵。

二次型最优控制问题就是:对于线性系统式(6-108),确定最优控制规律  $\mathbf{u}^*(t)$ ,使二次型性能指标式(6-109)为最小。

就实际工程应用而言,式(6-109)较全面地体现了对复杂控制系统的性能要求。其中,积分型性能泛函中的被积函数第一项为

$$L_x = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) \quad (6-110)$$

若  $\mathbf{x}$  表示误差向量,  $L_x$  则用来限制过程中偏差  $\mathbf{x}$  的大小,即体现对动态过程的要求。通常选  $\mathbf{Q}(t)$  为对角阵,此时

$$\begin{aligned} L_x &= \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) = \frac{1}{2} [x_1, x_2, \dots, x_n] \begin{bmatrix} q_{11}(t) & & & 0 \\ & q_{22}(t) & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 & q_m(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} [q_{11}(t)x_1^2 + q_{22}(t)x_2^2 + \dots + q_m(t)x_n^2] \end{aligned} \quad (6-111)$$

可酌情对各偏差分量  $x_i$  加不同的权,重要的分量可加大权,次要的分量加小权。当选择  $\mathbf{Q}(t)$  为  $t$  的函数时,则可在不同时刻对各分量加不同的权。如选  $q_{ii}(t_2) > q_{ii}(t_1) (t_2 > t_1)$ ,这实际上等于降低初始偏差的要求,而强调过程后期偏差的分量。

式(6-109)中,被积函数第二项  $L_u = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t)$  体现对控制能量的限制,要求  $\mathbf{R}(t) > 0$ ,这是因为在  $\mathbf{u}(t) \neq 0$  时,该项二次型出现 0 是不符合控制能量概念的。此外也只有要求  $\mathbf{R}(t) > 0$ ,才能充分保证  $\mathbf{R}^{-1}(t)$  存在,这是构成状态线性反馈、实现闭环最优控制的必要条件之一。

式(6-109)中的  $\frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{Q}_f \mathbf{x}(t_f)$  对应终端偏差,即体现稳态控制精度的限制。从理论上讲,  $L_x$  已包含终值的要求,引入这一项是为了进一步强调终端偏差控制的要求。

综上所述,二次型性能指标式(6-109)最小的物理意义是:在整个时间区间  $[t_0, t_f]$  内,综合考虑过程中偏差、控制消耗的能量和终值误差 3 个方面总的结果要最小。

由于二次型指标中要求消耗控制能量要小,许多实际问题中  $\mathbf{u}(t)$  一般在实际约束范围之内,所以在下面线性二次型问题的讨论中,一般就不直接考虑  $\mathbf{u}(t)$  的闭集约束条件。

## 6.6.2 有限时间的线性最优调节器

设线性系统的状态方程为式(6-108),二次型性能泛函为

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{Q}_f \mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t)] dt \quad (6-112)$$

式中,  $\mathbf{Q}_f = \mathbf{Q}_f^T \geq 0, \mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}^T(t) \geq 0, \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}^T(t) > 0$ 。

有限时间状态调节器问题:在满足状态方程(6-108) 约束条件下,在限定时间 $[t_0, t_f]$ 内,使系统由初始状态 $\mathbf{x}(t_0)$ 转移到终端状态 $\mathbf{x}(t_f)$ (在平衡状态 $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$ 附近),设 $\mathbf{u}(t)$ 无限制,求最优控制 $\mathbf{u}^*(t)$ 使二次型性能指标式(6-112) 取极小。可见,这是一个 $t_0, \mathbf{x}(t_0), t_f$ 固定,终端状态 $\mathbf{x}(t_f)$ 自由的条件泛函极值问题。变分法、极小值原理和动态规划均可求解该最优控制问题,这里应用极小值原理求解。

(1) 列写哈密顿函数

$$H[\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}] = \frac{1}{2}[\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t)] + \boldsymbol{\lambda}^T(t)[\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)] \quad (6-113)$$

(2) 建立极值条件

由于控制量 $\mathbf{u}(t)$ 不受限制,故满足控制方程

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}^T(t)\boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{0} \quad (6-114)$$

由于 $\mathbf{R}(t) > 0$ ,保证了 $\mathbf{R}^{-1}(t)$ 的存在,从而可得

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\boldsymbol{\lambda}(t) \quad (6-115)$$

(3) 建立正则方程

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}^T(t)\boldsymbol{\lambda}(t) \quad (6-116)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\boldsymbol{\lambda}(t) \quad (6-117)$$

式(6-115)表明,最优控制 $\mathbf{u}^*(t)$ 为 $\boldsymbol{\lambda}(t)$ 的线性函数,为了利用线性状态反馈实现 $\mathbf{u}^*(t)$ ,希望引入的伴随向量 $\boldsymbol{\lambda}(t)$ 与 $\mathbf{x}(t)$ 有线性关系,为此设

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) \quad (6-118)$$

式中, $\mathbf{P}(t)$ 为 $n \times n$ 维实对称半正定矩阵,待定。

将式(6-118)代入式(6-115),得

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) = -\mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t) \quad (6-119)$$

式中,待定的 $r \times n$ 维矩阵 $\mathbf{K}(t)$ 是实现最优控制 $\mathbf{u}^*(t)$ 的线性状态反馈增益矩阵,且

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t) \quad (6-120)$$

显然,若式(6-118)的假设成立,并能求得 $\mathbf{P}(t)$ ,则最优控制 $\mathbf{u}^*(t)$ 即可由状态向量 $\mathbf{x}(t)$ 的线性反馈来实现。

为求出 $\mathbf{P}(t)$ ,将式(6-118) 两端对 $t$ 求导,得

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \dot{\mathbf{P}}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{P}(t)\dot{\mathbf{x}}(t) \quad (6-121)$$

将式(6-118)、式(6-121)代入正则方程组,消去 $\boldsymbol{\lambda}(t)$ 及 $\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t)$ ,得

$$\dot{\mathbf{P}}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{P}(t)\dot{\mathbf{x}}(t) = -[\mathbf{Q}(t) + \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t)]\mathbf{x}(t) \quad (6-122)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t)]\mathbf{x}(t) \quad (6-123)$$

将式(6-123)代入式(6-122),并整理后得

$$\dot{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{Q}(t) + \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t) = \mathbf{0} \quad (6-124)$$

式(6-124)称为黎卡提(Riccati)矩阵微分方程,解此一阶非线性矩阵微分方程,即可求出 $\mathbf{P}(t)$ 。但解式(6-124),应有边界条件。

(4) 边界条件

据式(6-53),终端横截条件为

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial \Phi[\mathbf{x}(t_f), t_f]}{\partial \mathbf{x}(t_f)} = - \left[ \frac{\partial \left[ \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{Q}_f \mathbf{x}(t_f) \right]}{\partial \mathbf{x}(t_f)} \right] = \mathbf{Q}_f \mathbf{x}(t_f) \quad (6-125)$$

而当  $t=t_f$  时,式(6-118)为

$$\lambda(t_f) = \mathbf{P}(t_f) \mathbf{x}(t_f) \quad (6-126)$$

由式(6-125)、式(6-126)得  $t=t_f$  时  $\mathbf{P}(t)$  的边界条件为

$$\mathbf{P}(t_f) = \mathbf{Q}_f \quad (6-127)$$

当矩阵  $\mathbf{A}(t)$ 、 $\mathbf{B}(t)$ 、 $\mathbf{Q}(t)$  和  $\mathbf{R}(t)$  的各元素在时间区间  $[t_0, t_f]$  上都是  $t$  的连续函数时,黎卡提矩阵微分方程在  $[t_0, t_f]$  上满足边界条件的解是存在且唯一的。但由于它是非线性矩阵微分方程,通常不能解出闭合形式的解,因此需要用数字计算机求解。在解得  $\mathbf{P}(t)$  后,即可按式(6-119)构成状态线性反馈的最优控制。结构图如图 6-5 所示。

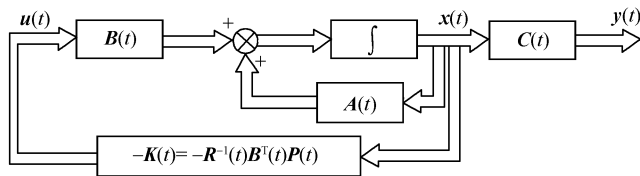


图 6-5 线性二次型最优反馈系统

(5) 求最优轨迹  $\mathbf{x}^*(t)$

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}^*(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}^*(t) \quad (6-128)$$

将式(6-119)代入式(6-128),得

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = [\mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t)] \mathbf{x}^*(t) \quad (6-129)$$

解式(6-129)并由始点边界条件  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , 求解得最优轨迹  $\mathbf{x}^*(t)$ 。

$$\text{最优性能指标为} \quad J^* = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_0) \mathbf{P}(t_0) \mathbf{x}(t_0) \quad (6-130)$$

式中,  $\mathbf{P}(t_0)$  为  $\mathbf{P}(t)$  在初始时刻  $t=t_0$  时的初值矩阵。

应该指出,上述有限时间状态调节器问题虽然采用了线性状态反馈实现了闭环最优控制,但反馈阵仍是时变阵。事实上,只要控制时间  $[t_0, t_f]$  为有限时间,由式(6-124)可见,即使状态方程和性能泛函都是定常的,即  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{Q}$ 、 $\mathbf{R}$  均为常值矩阵,求出的  $\mathbf{P}(t)$  仍然是时变的,最优反馈系统仍是时变系统,这增加了实现上的困难。

### 6.6.3 定常线性最优调节器

定常线性最优调节器是无限时间线性最优调节器的一种特殊情况。在介绍定常线性最优调节器前先概述无限时间状态调节器问题。

#### 1. 无限时间状态调节器

无限时间状态调节器问题:设被控线性系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (6-131)$$

式中,  $\mathbf{x} \in R^n$ ;  $\mathbf{u} \in R^r$ , 无限制;  $\mathbf{A}(t)$ 、 $\mathbf{B}(t)$  分别是  $n \times n$ 、 $n \times r$  维矩阵。二次型性能指标为

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t)] dt \quad (6-132)$$

求最优控制  $\mathbf{u}^*(t)$  使二次型性能指标式(6-132) 取极小。

该问题与有限时间调节器的主要差别在于终端时间由有限值  $t_f$  改为无限。之所以要研究这类问题,是因为有限时间最优调节器问题只考察控制系统由任意初态恢复到平衡状态的行为,而工程上所关心的另一类更广泛的问题是:除保证有限时间内系统的非零初态响应最优性之外,还要求系统具有保持平衡状态的能力。此种既有最优性要求又有稳定性要求的问题就无法用有限时间调节器理论去解决。如果将调节器问题推广到无限时间的情况,就可以在无限时间内既考察实际上有限时间内的响应,又考察系统的稳定性。在无限时间调节器中有一种特殊情况:状态方程和性能指标都是定常的,即定常调节器问题。

## 2. 定常线性最优调节器

设线性定常系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (6-133)$$

式中,  $\mathbf{x} \in R^n$ ;  $\mathbf{u} \in R^r$ , 无限制;  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$  分别是  $n \times n$ 、 $n \times r$  维常值矩阵。系统状态完全能控, 性能指标为

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt \quad (6-134)$$

式中,  $\mathbf{Q}$ 、 $\mathbf{R}$  为常值对称矩阵, 并且  $\mathbf{Q} > 0$ ,  $\mathbf{R} > 0$ , 则存在唯一最优控制

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t) \quad (6-135)$$

式中,  $\mathbf{P}$  是  $n \times n$  维正定对称常数矩阵, 满足下列黎卡提矩阵代数方程

$$-\mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} - \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (6-136)$$

将式(6-135)代入式(6-133), 可得闭环最优系统的状态方程

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}] \mathbf{x}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}] \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (6-137)$$

解线性定常齐次方程式(6-137), 可得最优轨线  $\mathbf{x}^*(t)$ 。

性能泛函的最小值为

$$J^* = \frac{1}{2} \mathbf{x}^{*T}(t_0) \mathbf{P} \mathbf{x}^*(t_0) \quad (6-138)$$

关于定常线性最优调节器, 需作如下几点说明:

(1) 系统是线性定常的, 性能指标中的权矩阵为常值矩阵。

(2) 要求被控系统状态完全能控, 以保证最优解的存在。但在有限时间调节器问题中, 对系统能控性没有要求。

(3) 在性能泛函中, 不包含体现终端指标的终端泛函  $\frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{Q}_f \mathbf{x}(t_f)$ 。因为在工程上考虑的是有限时间内系统的响应, 当  $t_f \rightarrow \infty$  时, 终端指标将失去工程意义。

(4) 与有限时间状态调节器一样, 定常线性最优控制式(6-135)也是全状态的线性反馈, 结构与图 6-5 相同。但是, 对定常线性最优调节器而言,  $\mathbf{P}$  是  $n \times n$  维实对称常矩阵, 是黎卡提矩阵代数方程的解, 因此, 构成线性定常闭环系统。

(5) 定常线性最优控制闭环系统式(6-137)的稳定性

对按定常状态调节器方法设计出来的状态反馈闭环系统式(6-137), 构造李亚普诺夫函数为

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$$

因为  $\mathbf{P}$  正定, 故  $V(\mathbf{x}) > 0$ , 其对时间的导数为

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}}$$

将式(6-137)代入上式, 得

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= x^T[A - BR^{-1}B^TP]^TPx + x^TP[A - BR^{-1}B^TP]x \\ &= x^T[(A^TP + PA - PBR^{-1}B^TP) - PBR^{-1}B^TP]x \\ &= -x^T[Q + PBR^{-1}B^TP]x\end{aligned}$$

因为  $R > 0$ , 所以  $R^{-1} > 0$ , 又  $Q > 0$ , 故  $\dot{V}(x)$  负定, 状态反馈闭环系统式(6-137)是渐近稳定的。应该指出, 由定理 4-2, 若  $\dot{V}(x)$  沿任意轨线不恒为零, 上述  $Q > 0$  的条件则可放宽为  $Q \geq 0$ 。可证明: 当  $R(t) = R^T(t) > 0$ ,  $Q(t) = Q^T(t) \geq 0$  时, 若矩阵对  $(A, D)$  完全能观测, 其中  $D$  是满足  $D^TD = Q$  的任一矩阵, 则  $P$  也是正定对称阵,  $V(x) = x^TPx > 0$ ,  $\dot{V}(x) \leq 0$  但  $\dot{V}(x)$  沿任意非零轨线不恒为零, 最优闭环系统式(6-137)也是渐近稳定的。

**【例 6-7】** 已知系统的状态方程

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

性能指标为

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x_1^2 + 2bx_1x_2 + ax_2^2 + u^2) dt$$

求使  $J$  达极小值的最优控制  $u^*(t)$ 。

**解** 本例为定常线性最优调节器问题( $t_f = \infty$ ), 故首先要判断系统的能控性。

$\text{rank}[B \quad AB] = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 = n$ , 故系统状态完全能控, 最优控制  $u^*(t)$  存在。

$$\text{因为 } J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x_1^2 + 2bx_1x_2 + ax_2^2 + u^2) dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + u^2 \right\} dt$$

故由题意知

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & a \end{bmatrix}, R = 1$$

设  $a > b^2$ , 则  $Q$  正定。

$$\begin{aligned}\text{最优控制为 } u^*(t) &= -R^{-1}B^TPx(t) = -1[0 \quad 1] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\ &= -p_{12}x_1(t) - p_{22}x_2(t)\end{aligned}$$

式中,  $P$  是下列黎卡提矩阵代数方程的正定对称解矩阵

$$-PA - A^TP + PBR^{-1}B^TP - Q = 0$$

$$\begin{aligned}\text{即 } -\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \\ \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 1[0 \quad 1] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & a \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

展开得代数方程组

$$p_{12}^2 = 1$$

$$-p_{11} + p_{12}p_{22} - b = 0$$

$$-2p_{12} + p_{22}^2 - a = 0$$

解出

$$p_{12} = \pm 1, p_{22} = \pm \sqrt{a + 2p_{12}}, p_{11} = p_{12}p_{22} - b$$

取  $P$  为正定的解, 得

$$p_{12} = 1, p_{22} = \sqrt{a + 2}, p_{11} = \sqrt{a + 2} - b$$

最优控制

$$u^*(t) = -x_1(t) - \sqrt{a + 2}x_2(t)$$

即实现最优控制  $u^*(t)$  的线性状态反馈增益矩阵

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} = 1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{a+2} - b & 1 \\ 1 & \sqrt{a+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{a+2} \end{bmatrix}$$

最优闭环系统结构图如图 6-6 所示。

闭环系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{A} - \mathbf{BK}] \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{a+2} \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

闭环系统特征多项式为

$$|s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})| = s^2 + s\sqrt{a+2} + 1$$

$$\text{闭环特征值 } s_{1,2} = -\frac{\sqrt{a+2}}{2} \pm \frac{\sqrt{a-2}}{2}$$

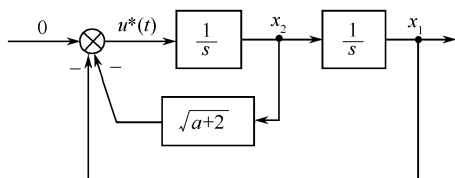


图 6-6 例 6-7 的闭环系统结构图

显然,性能指标中的  $\mathbf{Q}$  是正定(即  $a > b^2$ )时,闭环特征值均具负实部,闭环系统渐近稳定。实际上,若仅考虑闭环系统的稳定性,本例的  $\mathbf{Q}$  只要是半正定即可,如  $b=0, a=0$ ,即在性能指标中对信号  $x_2(t)$ (即输出量  $x_1$  的导数)不加权,此时闭环特征值为  $s_{1,2} = -0.707 \pm j0.707$ (相当于经典控制理论中阻尼比为 0.707 的二阶最佳阻尼振荡系统)。

#### 6.6.4 输出调节器

输出调节器主要研究当系统受到外部干扰时,在不消耗过多控制能量的前提下,维持系统的输出向量接近输出平衡状态。由于输出调节器问题可以转化为等效的状态调节器问题,故可根据前述状态调节器,应用类比的方法,建立输出调节器的最优控制规律。

##### 1. 有限时间时变输出调节器

设一个完全能观的线性时变系统为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (6-139)$$

式中,  $\mathbf{x} \in R^n, \mathbf{u} \in R^r, \mathbf{y} \in R^m, \mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t)$  和  $\mathbf{C}(t)$  分别是  $n \times n, n \times r$  和  $m \times n$  维矩阵,控制  $\mathbf{u}(t)$  不受限制。性能泛函为

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{y}^T(t_f) \mathbf{Q}_f \mathbf{y}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{y}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{y}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t)] dt \quad (6-140)$$

式中,  $\mathbf{Q}_f$  和  $\mathbf{Q}(t)$  均为  $n \times n$  维半正定对称矩阵,  $\mathbf{R}(t)$  是  $r \times r$  维正定对称矩阵。要求在有限时间区间  $[t_0, t_f]$  内,在式(6-139)约束下,寻求最优控制  $\mathbf{u}^*(t)$ ,使性能泛函  $J$  最小。

首先将这类问题转化为等效的状态调节器问题,然后利用前述状态调节器的结论求最优控制律。为此根据输出方程,用  $\mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t)$  代入式(6-140)中,得

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f) [\mathbf{C}^T(t_f) \mathbf{Q}_f \mathbf{C}(t_f)] \mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \{ \mathbf{x}^T(t) [\mathbf{C}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{C}(t)] \mathbf{x}(t) + \\ &\quad \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) \} dt \end{aligned} \quad (6-141)$$

与状态调节器问题相比,可以发现其唯一的差别是性能泛函中的权函数发生了变换,即由  $\mathbf{C}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{C}(t)$  和  $\mathbf{C}^T(t_f) \mathbf{Q}_f \mathbf{C}(t_f)$  分别替代式(6-112)中的  $\mathbf{Q}$  和  $\mathbf{Q}_f$ ,若  $\mathbf{C}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{C}(t)$  和  $\mathbf{C}^T(t_f) \mathbf{Q}_f \mathbf{C}(t_f)$  也是半正定对称矩阵,那么,由式(6-139)、式(6-140)所定义的输出调节器问题,就化为等价的状态调节器问题,关于状态调节器问题的所有结论在这里也就适用。事实上,只要系统式(6-139)状



态完全能观,  $\mathbf{Q}$  和  $\mathbf{Q}_f$  的半正定性必可保证  $\mathbf{C}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{C}(t)$  和  $\mathbf{C}^T(t_f)\mathbf{Q}_f\mathbf{C}(t_f)$  的半正定性。因此, 可以用状态调节器式(6-119)确定式(6-139)、式(6-140)所定义输出调节器问题的最优控制

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) \quad (6-142)$$

式中,  $\mathbf{P}(t)$  是下列黎卡提矩阵微分方程

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = -\mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t) - \mathbf{C}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{C}(t) \quad (6-143)$$

在边界条件

$$\mathbf{P}(t_f) = \mathbf{C}^T(t_f)\mathbf{Q}_f\mathbf{C}(t_f) \quad (6-144)$$

下的唯一非负定解。

由式(6-142)可见, 最优输出调节器的最优控制律仍然是状态反馈而不是输出反馈, 表明构成最优控制系统需要利用全部状态信息。

## 2. 无限时间定常输出调节器

设能控且能观的线性定常系统

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (6-145)$$

式中,  $\mathbf{x} \in R^n$ ;  $\mathbf{y} \in R^m$ ;  $\mathbf{u} \in R^r$ , 无限制;  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$  分别是  $n \times n$ 、 $n \times r$ 、 $m \times n$  维常值矩阵。二次型性能泛函为

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [\mathbf{y}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{y}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)] dt \quad (6-146)$$

式中,  $\mathbf{Q}$ 、 $\mathbf{R}$  为常值对称矩阵, 并且  $\mathbf{Q} > 0$ ,  $\mathbf{R} > 0$ 。求最优控制  $\mathbf{u}^*(t)$  使二次型性能指标式(6-146)取极小。

这一问题等价于一个定常状态调节器问题, 于是可用定常状态调节器式(6-135)确定式(6-145)、式(6-146)所定义无限时间定常输出调节器问题的最优控制为

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x}(t) \quad (6-147)$$

式中,  $\mathbf{P}$  是下列黎卡提矩阵代数方程的正定对称解

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{C}^T\mathbf{Q}\mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (6-148)$$

【例 6-8】 设被控系统状态空间表达式为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad 0] \mathbf{x} \end{aligned}$$

性能泛函

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [y^2 + q_2 u^2] dt, q_2 > 0$$

求最优控制  $\mathbf{u}^*(t)$ , 使性能泛函  $J$  取极值。

解 系统能控且能观, 并且  $\mathbf{R} = q_2 > 0$ ,  $\mathbf{Q} = 1 > 0$ , 故存在最优输出调节器

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x}(t) = -\frac{1}{q_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = -\frac{1}{q_2} [p_{12}x_1(t) + p_{22}x_2(t)]$$

式中, 正定实对称阵  $\mathbf{P}$  为下列黎卡提矩阵代数方程的解

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{C}^T\mathbf{Q}\mathbf{C} = \mathbf{0}$$

将  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{C} = [1 \quad 0]$ ,  $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{Q} = 1$ ,  $\mathbf{R} = q_2$  代入, 并展开得

$$\frac{1}{q_2} p_{12}^2 = 1, -p_{11} + \frac{1}{q_2} p_{12} p_{22} = 0, -2p_{12} + \frac{1}{q_2} p_{22}^2 = 0$$

$\mathbf{P}$  正定要求  $p_{11} > 0, p_{22} > 0, p_{11} p_{22} - p_{12}^2 > 0$ , 解得

$$p_{12} = \sqrt{q_2}, p_{22} = \sqrt{2} q_2^{\frac{3}{4}}, p_{11} = \sqrt{2} q_2^{\frac{1}{4}}$$

最优控制为

$$\begin{aligned} u^*(t) &= -q_2^{-\frac{1}{2}} x_1(t) - \sqrt{2} q_2^{-\frac{1}{4}} x_2(t) \\ &= -q_2^{-\frac{1}{2}} y(t) - \sqrt{2} q_2^{-\frac{1}{4}} \dot{y}(t) \end{aligned}$$

### 6.6.5 非零给定点调节器

在调节器问题中,通常将所要求的被调量的期望点(或平衡点)称为给定点。在前面阐述调节器设计时,均将坐标原点作为给定点,实际情况也往往如此。然而,有时要求给定点非零,且是可变的。本节讨论非零给定点的定常输出调节器设计问题。

设能控且能观的线性定常系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (6-149)$$

式中,  $\mathbf{x} \in R^n; \mathbf{y} \in R^m; \mathbf{u} \in R^r$ , 无限制;  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  分别是  $n \times n, n \times r, m \times n$  维常值矩阵。被控量为输出向量  $\mathbf{y}$ , 希望使其保持在非零给定点  $\mathbf{y}_w$ 。

显然,调节器设计所期望的静特性是  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}$  的稳态值  $\mathbf{x}_w, \mathbf{y}_w, \mathbf{u}_w$  应满足

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_w + \mathbf{B}\mathbf{u}_w \\ \mathbf{y}_w &= \mathbf{C}\mathbf{x}_w \end{aligned} \quad (6-150)$$

设动态过程中,  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}$  偏离各自(期望)稳态值的偏差量分别为  $\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{u}}$ , 即

$$\tilde{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_w, \tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_w, \tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_w \quad (6-151)$$

将上式变形代入状态空间表达式(6-149),并根据式(6-150),得

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}(t) \\ \tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(t) \end{cases} \quad (6-152)$$

为使系统具有良好动特性,对式(6-152)所示偏差量的系统取二次型性能泛函

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty [\tilde{\mathbf{y}}^T(t) \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{y}}(t) + \tilde{\mathbf{u}}^T(t) \mathbf{R} \tilde{\mathbf{u}}(t)] dt \quad (6-153)$$

式中,  $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$  为常值对称矩阵,并且  $\mathbf{Q} > 0, \mathbf{R} > 0$ 。

性能指标式(6-153)具有明确的物理意义,即要求消除偏差的过程足够快,又使控制输入的偏差幅度不致过大。偏差量的系统式(6-152)的期望点为零点,故根据上节(给定点为零的)输出调节器设计原理,可求出使性能泛函式(6-153)最小的最优控制

$$\tilde{\mathbf{u}}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{K} \tilde{\mathbf{x}}(t) \quad (6-154)$$

式中,  $\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}$ , 其中实对称阵  $\mathbf{P}$  是下列黎卡提矩阵代数方程

$$-\mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} - \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (6-155)$$

的唯一正定解,并保证闭环系统

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}^*(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\tilde{\mathbf{x}}(t) \quad (6-156)$$

在  $\tilde{\mathbf{x}}_e = \mathbf{0}$  渐近稳定。

将式(6-151)代入控制律式(6-154)中,整理可得原系统式(6-149)希望输出向量维持在非零给定点上的最优控制

$$\mathbf{u}^*(t) = \tilde{\mathbf{u}}^* + \mathbf{u}_w = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{u}_w = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}_w + \mathbf{u}_w = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}_g \quad (6-157)$$

式中

$$\mathbf{u}_g = \mathbf{K}\mathbf{x}_w + \mathbf{u}_w \quad (6-158)$$

式(6-157)表明,最优控制  $\mathbf{u}^*(t)$  由两部分组成:一部分等于状态的线性负反馈  $-\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ ,其中,状态反馈增益矩阵  $\mathbf{K}$  由式(6-154)、式(6-155)确定,可以看出,其等于系统式(6-149)在性能泛函取

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty [\mathbf{y}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{y}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt \quad (6-159)$$

且为零给定时输出调节器问题的最优状态反馈增益矩阵;另一部分是对应非零给定点  $\mathbf{y}_w$  的常值控制向量  $\mathbf{u}_g$ 。

为确定  $\mathbf{u}_g$ ,将最优控制律式(6-157)代入原被控系统状态方程式(6-149),得

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}_g \quad (6-160)$$

由于闭环系统渐近稳定,因此,稳态时有  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0}$ ,则由式(6-160)得

$$\mathbf{0} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}_w + \mathbf{B}\mathbf{u}_g$$

则

$$\mathbf{x}_w = -(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{u}_g$$

故有

$$\mathbf{y}_w = -\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{u}_g \quad (6-161)$$

式(6-161)为求解  $\mathbf{u}_g$  的方程式。若  $\mathbf{y}$  的维数小于  $\mathbf{u}$  的维数,即  $m < r$  时,方程式(6-161)有多解;若  $r < m$ ,一般情况下无解。故仅进一步推导  $r = m$  情况下的  $\mathbf{u}_g$  计算。

当  $r = m$  时,若  $\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^{-1} \mathbf{B}$  非奇异,由式(6-161)可求得

$$\mathbf{u}_g = -[\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^{-1} \mathbf{B}]^{-1} \mathbf{y}_w \quad (6-162)$$

又状态反馈闭环系统传递函数阵为

$$\mathbf{W}_c(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})]^{-1} \mathbf{B} \quad (6-163)$$

显然有

$$\mathbf{W}_c(0) = -\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^{-1} \mathbf{B} \quad (6-164)$$

故当  $r = m$  时,若  $\mathbf{W}_c(0)$  的逆存在,只要取

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{W}_c^{-1}(0) \mathbf{y}_w \quad (6-165)$$

即可实现非零给定点的最优输出调节,即  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_w$ 。采用式(6-165)最优控制律的闭环系统结构如图 6-7 所示。从图中可以看出,给定值  $r = \mathbf{y}_w$  经输入变换  $\mathbf{W}_c^{-1}(0)$  后再加至控制输入点,否则,不能保证  $\mathbf{y}(\infty) = \mathbf{y}_w$ 。

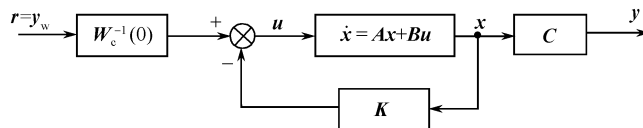


图 6-7 非零给定点最优调节系统结构图

### 6.6.6 最优跟踪问题

最优跟踪问题的控制任务是寻求最优控制规律  $\mathbf{u}^*(t)$ ,使系统的实际输出  $\mathbf{y}(t)$  在给定的时间区间内,尽量跟踪或接近所期望的轨线  $\mathbf{z}(t)$  而又不消耗过多的控制能量。

最优跟踪问题:设能观测线性时变系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (6-166)$$

式中,  $\mathbf{x} \in R^n$ ,  $\mathbf{u} \in R^r$ ,  $\mathbf{y} \in R^m$ ,  $\mathbf{A}(t)$ 、 $\mathbf{B}(t)$  和  $\mathbf{C}(t)$  分别是  $n \times n$ 、 $n \times r$  和  $m \times n$  维时变矩阵, 控制量  $\mathbf{u}(t)$  不受约束, 终端时刻  $t_f$  固定。设  $\mathbf{z}(t) \in R^m$ , 为系统输出  $\mathbf{y}(t)$  的期望向量, 即为所跟踪目标的运动规律, 定义误差函数向量为

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{z}(t) - \mathbf{y}(t) \quad (6-167)$$

寻找最优控制  $\mathbf{u}^*(t)$ , 使被控系统式(6-166)的输出  $\mathbf{y}(t)$  跟踪  $\mathbf{z}(t)$ , 且使式(6-168)所示的性能泛函为最小

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T(t_f) \mathbf{Q}_f \mathbf{e}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{e}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{e}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t)] dt \quad (6-168)$$

式中,  $\mathbf{Q}_f$ 、 $\mathbf{Q}(t)$  为半正定对称矩阵,  $\mathbf{R}(t)$  为正定对称矩阵。

应用极小值原理求解最优控制。首先建立上述最优跟踪问题的哈密顿函数

$$H = \frac{1}{2} [(\mathbf{z}(t) - \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t))^T \mathbf{Q}(t) (\mathbf{z}(t) - \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t))] + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t) [\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)] \quad (6-169)$$

因为控制量  $\mathbf{u}(t)$  取值不受限制, 故由控制方程建立极值条件

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}^T(t)\boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{0} \quad (6-170)$$

$$\text{则} \quad \mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\boldsymbol{\lambda}(t) \quad (6-171)$$

得正则方程

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}(t)} = -\mathbf{C}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}^T(t)\boldsymbol{\lambda}(t) + \mathbf{C}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{z}(t) \quad (6-172)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\boldsymbol{\lambda}(t) \quad (6-173)$$

其边界条件和横截条件为

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}(t_f) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}(t_f)} [\mathbf{z}(t_f) - \mathbf{C}(t_f)\mathbf{x}(t_f)]^T \mathbf{Q}_f [\mathbf{z}(t_f) - \mathbf{C}(t_f)\mathbf{x}(t_f)] \\ &= \mathbf{C}^T(t_f) \mathbf{Q}_f \mathbf{C}(t_f) \mathbf{x}(t_f) - \mathbf{C}^T(t_f) \mathbf{Q}_f \mathbf{z}(t_f) \end{aligned} \quad (6-174)$$

考虑到式(6-174)中的  $\boldsymbol{\lambda}(t_f)$  由两项构成, 一项为  $\mathbf{x}(t_f)$  的线性函数, 另一项则为期望输出  $\mathbf{z}(t_f)$  的线性函数, 故令

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{g}(t) \quad (6-175)$$

将式(6-175)代入式(6-171), 得

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\boldsymbol{\lambda}(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{g}(t) \quad (6-176)$$

可见, 只需求出  $\mathbf{P}(t)$  和  $\mathbf{g}(t)$ , 代入式(6-176), 即可求得跟踪器的最优控制  $\mathbf{u}^*(t)$ 。

对式(6-175)求导得

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \dot{\mathbf{P}}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{P}(t)\dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{g}}(t) \quad (6-177)$$

将式(6-175)代入式(6-173), 得

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{g}(t) \quad (6-178)$$

将式(6-178)代入式(6-177), 得

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = [\dot{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t)]\mathbf{x}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{g}(t) - \dot{\mathbf{g}}(t) \quad (6-179)$$

将式(6-175)代入式(6-172),得

$$\dot{\lambda}(t) = -[C^T(t)Q(t)C(t) + A^T(t)P(t)]x(t) + A^T(t)g(t) + C^T(t)Q(t)z(t) \quad (6-180)$$

比较式(6-180)和式(6-179)得  $P(t)$  应满足如下矩阵微分方程

$$\dot{P}(t) = -P(t)A(t) - A^T(t)P(t) + P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) - C^T(t)Q(t)C(t) \quad (6-181)$$

$g(t)$  应满足如下矩阵微分方程

$$\dot{g}(t) = [P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t) - A^T(t)]g(t) - C^T(t)Q(t)z(t) \quad (6-182)$$

为得到方程式(6-181)、式(6-182)的边界条件可令式(6-175)中  $t=t_f$ , 则

$$\lambda(t_f) = P(t_f)x(t_f) - g(t_f) \quad (6-183)$$

并将式(6-183)与式(6-174)比较,得边界条件

$$P(t_f) = C^T(t_f)Q_fC(t_f) \quad (6-184)$$

$$g(t_f) = C^T(t_f)Q_fz(t_f) \quad (6-185)$$

$P(t)$  为微分方程式(6-181)在边界条件式(6-184)下的解,而  $g(t)$  为微分方程式(6-182)在边界条件式(6-185)下的解。将解出的  $P(t)$ 、 $g(t)$  代入式(6-176),得跟踪器的最优控制

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x(t) + R^{-1}(t)B^T(t)g(t) \quad (6-186)$$

将有限时间最优输出调节器设计问题对应的式(6-143)、式(6-144)与式(6-181)、式(6-184)相比较,可见二者一致,这表明最优跟踪系统的反馈结构与最优输出调节器的反馈结构相同,而与理想输出  $z(t)$  无关。二者的区别在于跟踪系统的最优控制  $u^*(t)$  中除了有状态的线性组合  $-R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x(t)$  这一项(这与最优输出调节器相同),还多出了一个与  $g(t)$  有关的输入项  $R^{-1}(t)B^T(t)g(t)$ 。 $g(t)$  与理想输出  $z(t)$  有关,故其表示了跟踪  $z(t)$  的驱动作用。

## 6.7 最小时间控制

最小时间控制研究在容许控制范围内寻找最优控制,以最短时间将系统从任意初始状态转移到期望的目标集(即终端状态)。一般来说,求非线性被控系统最短时间控制问题的解析解很困难,本节应用极小值原理仅讨论线性定常系统且目标集为状态空间原点的最小时间控制问题。

设状态完全能控的线性定常系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (6-187)$$

式中,  $x \in R^n$ ,  $u \in R^r$ ,  $A$  和  $B$  分别是  $n \times n$ ,  $n \times r$  维常值矩阵,控制向量  $u(t)$  受以下不等式约束

$$|u_j(t)| \leq M, M > 0, j = 1, 2, \dots, r \quad (6-188)$$

寻求最优控制  $u^*(t)$ , 使系统从已知初始状态  $x_0$  转移到终端状态  $x(t_f) = 0$ , 并使性能泛函

$$J = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0 \quad (6-189)$$

为极小,其中终端时刻  $t_f$  自由。

构造上述问题的哈密顿函数

$$H[x(t), u(t), \lambda, t] = 1 + \lambda^T(t)[Ax(t) + Bu(t)] \quad (6-190)$$

根据极小值原理可得最优控制的必要条件:

正则方程

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (6-191)$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -A^T \lambda(t) \quad (6-192)$$

边界条件

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{0} \quad (6-193)$$

极值条件

$$H^* = 1 + \boldsymbol{\lambda}^T(t) [\mathbf{A}\mathbf{x}^*(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}^*(t)] = \min_{|u_j| \leq M, j=1,2,\dots,r} \{1 + \boldsymbol{\lambda}^T(t) [\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)]\} \quad (6-194)$$

$$\text{即} \quad \boldsymbol{\lambda}^{*T}(t) \mathbf{B}\mathbf{u}^*(t) = \min_{|u_j| \leq M, j=1,2,\dots,r} \boldsymbol{\lambda}^T(t) \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (6-195)$$

$$\text{设} \quad \mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_r] \quad (6-196)$$

式中,  $\mathbf{b}_j$  为输入矩阵  $\mathbf{B}$  的第  $j$  列向量,  $j=1,2,\dots,r$ , 则得

$$\boldsymbol{\lambda}^{*T}(t) \mathbf{b}_j u_j^*(t) = \min_{|u_j| \leq M, j=1,2,\dots,r} \boldsymbol{\lambda}^T(t) \mathbf{b}_j u_j(t) \quad (6-197)$$

由此可得在约束条件式(6-188)下的最优控制为

$$u_j^*(t) = \begin{cases} +M & \text{当 } \boldsymbol{\lambda}^{*T}(t) \mathbf{b}_j < 0 \\ \text{不定} & \text{当 } \boldsymbol{\lambda}^{*T}(t) \mathbf{b}_j = 0 \\ -M & \text{当 } \boldsymbol{\lambda}^{*T}(t) \mathbf{b}_j > 0 \end{cases} \quad (6-198)$$

由式(6-198)可知, 当  $\boldsymbol{\lambda}^{*T}(t) \mathbf{b}_j \neq 0$  时, 时间最优控制  $u_j^*(t)$  为分段恒值函数, 且其数值不是  $+M$  就是一  $M$ , 即为容许控制的边界值。当  $\boldsymbol{\lambda}^{*T}(t) \mathbf{b}_j$  穿过零点时,  $u_j^*(t)$  由一个边界值切换为另一个边界值。如果  $\boldsymbol{\lambda}^{*T}(t) \mathbf{b}_j$  在某一时间区间内保持为零, 则该区间内  $u_j^*(t)$  与  $\mathbf{x}^*(t)$ 、 $\boldsymbol{\lambda}^*(t)$  和  $t$  之间的关系不能根据哈密顿函数对  $u_j^*(t)$  取极小这个条件来确定, 这种情况称为奇异问题或非平凡问题, 相应的时间区间称为奇异区段。限于篇幅, 本书不讨论奇异区段内的最优控制问题。当整个时间区间内不出现奇异区段时, 则称为非奇异问题或平凡(正常)问题。对于平凡问题, 这里仅简单阐述几个有关的定义及定理。

### 1. Bang-Bang 控制原理

若系统式(6-187)的时间最优控制问题是平凡(正常)的, 则其最小时间控制为

$$u_j^*(t) = -M \operatorname{sgn}[\mathbf{b}_j^T \boldsymbol{\lambda}^*(t)] = \begin{cases} +M, & \mathbf{b}_j^T \boldsymbol{\lambda}^*(t) < 0 \\ -M, & \mathbf{b}_j^T \boldsymbol{\lambda}^*(t) > 0 \end{cases} \quad (j=1,2,\dots,r) \quad (6-199)$$

式中,  $\operatorname{sgn}$  为符号函数,  $\mathbf{b}_j$  为  $\mathbf{B}$  的第  $j$  列向量。即  $\mathbf{u}^*(t)$  的各个分量  $u_j^*(t)$  均取控制域的边界值, 且来回从一个边界值切换到另一个边界值, 构成最强的控制作用, 这是一种继电型控制, 称为 Bang-Bang 控制或开关控制。

### 2. 线性定常系统时间最优控制问题正常性的判据

线性定常系统式(6-187)的时间最优控制是否为 Bang-Bang 控制, 仅决定于问题是否是平凡(正常)的。当且仅当满足

$$\operatorname{rank}[\mathbf{b}_j \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_j \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}_j] = n, \quad \forall j=1,2,\dots,r \quad (6-200)$$

系统式(6-187)的时间最优控制问题是平凡(正常)的。式(6-200)中的  $\mathbf{b}_j$  为  $\mathbf{B}$  的第  $j$  列向量, 由式(6-196)定义。可见, 平凡问题要求每个  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}_j)$  都是能控对。有时将满足判定条件式(6-200)的系统也称为正常系统, 易证系统能控是其为正常系统的前提条件。显然, 对于单输入系统, 系统正常与系统能控彼此等价。

### 3. 开关次数上限

设线性定常系统式(6-187)是正常的, 控制向量  $\mathbf{u}(t)$  受不等式(6-188)约束, 且系统矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值全部为实数, 则其时间最优控制(Bang-Bang 控制)在两个边界值之间的切换次数最多不超过  $n-1$  次。其中,  $n$  是系统式(6-187)的阶数。

【例 6-9】 设双积分系统状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

初始条件

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

终端条件

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{0}$$

控制约束

$$-1 \leq u(t) \leq 1, \quad (t_0 < t < t_f)$$

性能指标

$$J = \int_{t_0}^{t_f} dt$$

求最优控制  $u^*(t)$ , 将系统从初态转移到终态并使  $J$  为极小。

**解** 系统为单输入系统,  $j=1$ ,  $\text{rank}[\mathbf{b} \quad \mathbf{Ab}] = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 = n$ , 被控系统是能控的, 也是正常的, 故最优控制为 Bang-Bang 控制, 两个边界值之间至多进行一次切换 ( $n-1=2-1=1$ ), 可根据极小值原理求解。

(1) 建立哈密顿函数

$$H = L + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f} = 1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$$

(2) 建立极值条件

为使  $H$  全局最小, 可得最优控制

$$u^*(t) = -\text{sgn}[\mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda}(t)] = -\text{sgn} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} \right\} = -\text{sgn}[\lambda_2(t)] = \begin{cases} +1, & \lambda_2(t) < 0 \\ -1, & \lambda_2(t) > 0 \end{cases}$$

(3) 建立正则方程

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}$$

即

$$\dot{\lambda}_1(t) = 0, \quad \dot{\lambda}_2(t) = -\lambda_1(t)$$

$$\text{状态方程} \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \{-\text{sgn}[\lambda_2(t)]\}$$

即

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\text{sgn}[\lambda_2(t)]$$

(4) 解方程, 确定最优控制律

求解协态方程得

$$\lambda_1(t) = \lambda_{10}, \quad \lambda_2(t) = \lambda_{20} - \lambda_{10}t$$

故

$$u^*(t) = -\text{sgn}[\lambda_2(t)] = -\text{sgn}[\lambda_{20} - \lambda_{10}t] = \begin{cases} +1, & \lambda_{20} - \lambda_{10}t < 0 \\ -1, & \lambda_{20} - \lambda_{10}t > 0 \end{cases}$$

$\lambda_2(t) = \lambda_{20} - \lambda_{10}t$  是一直线, 其 4 种可能形状及与之相应的  $u^*(t)$  如图 6-8 所示。

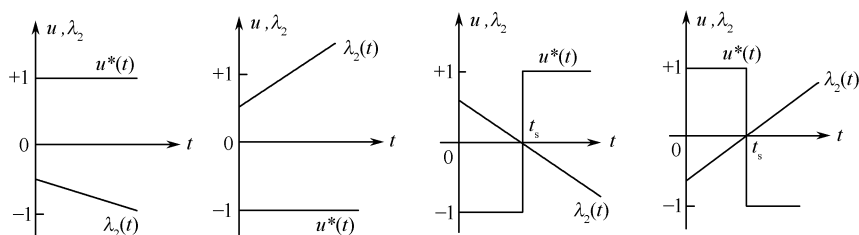


图 6-8  $\lambda_2(t)$  和  $u^*(t)$  的对应关系

在整个控制过程中,  $u^*(t)$  在两个边界值  $-1$  和  $+1$  之间至多进行一次切换, 故最优控制律  $u^*(t)$  有以下 4 种可能的方式:

$$\{+1\}, \{-1\}, \{-1, +1\}, \{+1, -1\}$$

为确定最优控制的方式,并用状态反馈实现最优控制,现在来求解状态方程以找到  $u^*(t)$  与  $\mathbf{x}^*(t)$  之间的关系。

当  $u^* = +1$  时,状态方程的解为

$$\begin{aligned} x_2(t) &= x_{20} + t \\ x_1(t) &= x_{10} + x_{20}t + \frac{1}{2}t^2 \end{aligned}$$

消去时间变量  $t$ , 可得相应的最优轨迹方程为

$$x_1(t) = \frac{1}{2}x_2^2(t) + \left(x_{10} - \frac{1}{2}x_{20}^2\right)$$

在图 6-9 中用实线表示,由于  $x_2(t) = x_{20} + t$  随  $t$  增大,故最优轨线行进的方向自下而上,如曲线上箭头所示。

当  $u^* = -1$  时,状态方程的解为

$$\begin{aligned} x_2(t) &= x_{20} - t \\ x_1(t) &= x_{10} + x_{20}t - \frac{1}{2}t^2 \end{aligned}$$

相应的最优轨迹方程为

$$x_1(t) = -\frac{1}{2}x_2^2(t) + \left(x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}^2\right)$$

在图 6-9 中用虚线表示,由于  $x_2(t) = x_{20} - t$  随  $t$  减小,故曲线箭头方向自上而下。

由图 6-9 可见,这种时间最优控制系统中的状态轨线是两簇开口相反的抛物线。当  $u^* = +1$  时开口向右,当  $u^* = -1$  时开口向左。每簇曲线中都只有一条曲线的半支能引向原点。

在  $u^* = +1$  的曲线簇中,引向原点的半支抛物线记为  $\gamma_+$ , 其方程为

$$\gamma_+ : \quad x_1(t) = \frac{1}{2}x_2^2(t), x_2(t) \leq 0$$

在  $u^* = -1$  的曲线簇中,引向原点的半支抛物线记为  $\gamma_-$ , 其方程为

$$\gamma_- : \quad x_1(t) = -\frac{1}{2}x_2^2(t), x_2(t) \geq 0$$

曲线  $\gamma_+$  和  $\gamma_-$  组合成一条通过原点的曲线,称为开关曲线,记为  $\gamma$ , 其方程为

$$\gamma = \gamma_+ \cup \gamma_- : \quad x_1(t) + \frac{1}{2}x_2(t) |x_2(t)| = 0 \quad (6-201)$$

于是,得到开关函数

$$h(x_1, x_2) = x_1(t) + \frac{1}{2}x_2(t) |x_2(t)| \quad (6-202)$$

和最优反馈控制律

$$u^*[\mathbf{x}^*(t)] = \begin{cases} +1, & h(x_1, x_2) < 0 \\ -\operatorname{sgn}(x_2), & h(x_1, x_2) = 0 \\ -1, & h(x_1, x_2) > 0 \end{cases} \quad (6-203)$$

在时间最优控制中,开关曲线(或曲面)是一重要概念。如图 6-10 所示,开关曲线  $\gamma$  将  $x_1$ - $x_2$  相平面划分为  $R_-$  和  $R_+$  两个区域,作为状态的集合,可用下式表示

$$R_- = \left\{ (x_1, x_2) \mid h(x_1, x_2) = x_1 + \frac{1}{2}x_2 |x_2| > 0 \right\}$$



$$R_+ = \left\{ (x_1, x_2) \mid h(x_1, x_2) = x_1 + \frac{1}{2}x_2 |x_2| < 0 \right\}$$

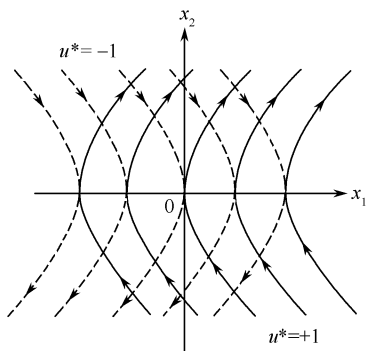


图 6-9 时间最优控制中的状态轨线

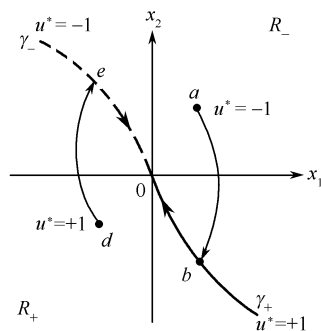


图 6-10 开关曲线及其划分的控制域

式(6-203)表明,为了使系统从初态 $(x_{10}, x_{20})$ 以最小时间转移到终态 $(0, 0)$ ,应根据初态所处位置不同而采取不同的控制律。

例如,当初态位于 $R_-$ 区(如点 $a$ )时, $h(x_1, x_2) = x_1(t) + \frac{1}{2}x_2(t)|x_2(t)| > 0$ ,由式(6-203), $u^* = -1$ ;系统的状态在此控制作用下沿一条抛物线(如曲线 $ab$ )自上而下转移,到达曲线 $\gamma_+$ (如点 $b$ )时,最优控制切换为 $u^* = +1$ (这时 $h(x_1, x_2) = 0$ ,由式(6-203), $u^* = +1$ ),且在此控制作用下,系统状态沿曲线 $\gamma_+$ 转移至原点。

类似地,可分析当初态位于 $R_+$ 区(如点 $d$ )时,系统状态先在 $u^* = +1$ 作用下沿一条抛物线(如曲线 $de$ )由下向上转移至 $\gamma_-$ ,然后切换成 $u^* = -1$ 并在此控制作用下沿 $\gamma_-$ 转移至原点。

若初态位于 $\gamma_+$ ,则 $u^* = +1$ ,并在此控制作用下系统状态沿 $\gamma_+$ 转移至原点;而若初态位于 $\gamma_-$ ,则 $u^* = -1$ ,并在此控制作用下系统状态沿 $\gamma_-$ 转移至原点。

#### (5) 最优控制律的工程实现

上述控制律可采用图 6-11 所示的状态反馈闭环控制结构来实现。如图所示, $x_2(t)$ 经非线性元件 $N$ 输出 $\frac{1}{2}x_2|x_2|$ ,然后与 $x_1(t)$ 相加,形成式(6-202)所示的开关函数信号 $h(x_1, x_2)$ , $h(x_1, x_2)$ 反相后再经实际继电器 $R$ 输出最优控制 $u^*$ 。

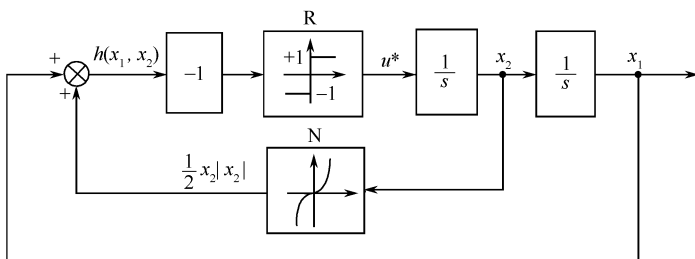


图 6-11 双积分系统时间最优控制的工程实现

## 6.8 应用 MATLAB 解线性二次型最优控制问题

MATLAB 控制系统工具箱中提供了求解线性二次型(LQ)最优控制问题的函数及算法,其中,函数`lqr()`与`lqry()`可直接求解定常连续系统线性二次型调节器问题及相关的黎卡提矩阵

代数方程。函数  $\text{lqr}()$  为设计定常线性最优调节器(无限时间定常状态调节器)的命令;函数  $\text{lqry}()$  为设计无限时间定常输出调节器的命令。函数  $\text{lqr}()$  与  $\text{lqry}()$  的调用格式为

$$[\mathbf{K}, \mathbf{P}, \mathbf{E}] = \text{lqr}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Q}, \mathbf{R})$$

$$[\mathbf{K}, \mathbf{P}, \mathbf{E}] = \text{lqry}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{Q}, \mathbf{R})$$

式中,  $\mathbf{K}$  为最优状态反馈增益矩阵,  $\mathbf{P}$  为对应的黎卡提矩阵代数方程的解,  $\mathbf{E}$  为  $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$  的特征值。

【例 6-10】 已知被控系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

系统结构如图 6-12 所示。

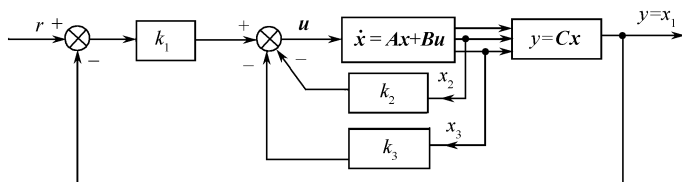


图 6-12 例 6-10 系统结构图

由结构图有系统的控制信号

$$u = k_1(r - x_1) - (k_2 x_2 + k_3 x_3) = k_1 r - (k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3) = k_1 r - \mathbf{Kx}$$

式中, 状态反馈增益矩阵  $\mathbf{K}$

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$$

系统性能泛函为 
$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + u^T(t) \mathbf{R} u(t)] dt$$

其中

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{R} = [1]$$

试计算最优状态反馈矩阵  $\mathbf{K}$ , 使  $J$  最小并对其闭环系统进行单位阶跃响应的仿真。

**解** 根据题意, 须首先求解出最优状态反馈矩阵  $\mathbf{K}$ , 这可调用  $\text{lqr}()$  函数来解决。根据系统结构图 6-12, 闭环系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}(k_1 r - \mathbf{Kx}) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{B}k_1 r$$

系统的输出方程不变。MATLAB Program 6\_1 为求解本题的 MATLAB 程序。运行程序后, 求出最优状态反馈矩阵  $\mathbf{K} = [31.6228 \quad 19.0661 \quad 3.9377]$  及闭环系统输出  $y$  的单位阶跃响应仿真曲线(见图 6-13), 可见闭环系统具有良好的动、静态特性。

```
%MATLAB Program 6_1
% Design of Quadratic optimal control system md6-10. m
% Enter state matrix A B C D
a=[0 1 0;0 0 1; 0 -2 -3]; b=[0; 0; 1];
c=[1 0 0]; d=0;
% Enter matrices Q and R of the quadratic performance
```

```

Q=[1000 0 0; 0 1 0; 0 0 1]; R=1;
% To obtain the optimal state feedback gain matrix K
K=lqr(a,b,Q,R)
k1=K(1)
% To obtain the unit-step response curve
ac=a-b*K; bc=b*k1; cc=c; dc=d;
step(ac,bc,cc,dc);
grid

```

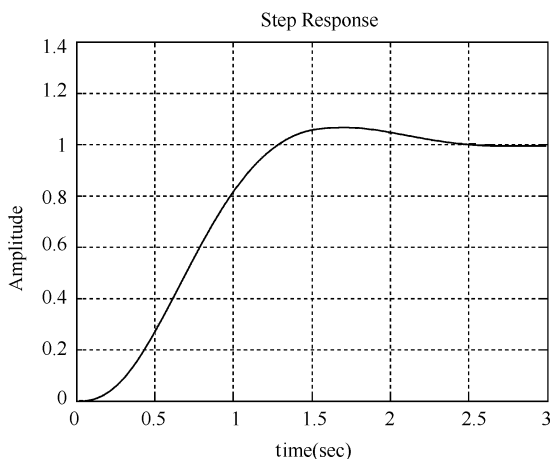


图 6-13 闭环系统输出  $y$  的单位阶跃响应曲线

## 6.9 最优控制理论的工程应用举例

**【例 6-11】** 最小时间航行问题。船匀速为  $V$ , 水匀速为  $W$ , 且  $V \geq W$ , 从初始点至给定点的最小时间航行, 平面坐标系为  $x_1 O x_2$ , 且  $W$  与  $x_1$  轴方向一致,  $u$  角为航向与  $Ox_1$  轴的夹角。模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = V \cos u + W & x_1(0) = 0, x_1(t_1) = x_1 \\ \dot{x}_2 = V \sin u & x_2(0) = 0, x_2(t_1) = x_2 \end{cases}$$

求  $t_1^*$  及最优控制  $u^*(t)$  使性能泛函  $J = \int_0^{t_1} dt$  为最小。

**解** 应用极小值原理求解。

建立所求问题的哈密顿函数  $H = 1 + \lambda_1 V \cos u + \lambda_2 V \sin u$

由式(6-87)得

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -\lambda_1 V \sin u + \lambda_2 V \cos u = 0$$

极值条件

$$\tan u^* = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

由式(6-80)得

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0}, \text{ 即 } \begin{cases} \dot{\lambda}_1 = 0 \\ \dot{\lambda}_2 = 0 \end{cases}$$

则  $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$  均为常数, 故

$$\begin{aligned}\tan u^* &= c \\ \sin u^* &= \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \\ \cos u^* &= \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\end{aligned}$$

代入系统状态方程得

$$\dot{x}_1 = \frac{V}{\sqrt{1+c^2}} + W, x_1(0) = 0$$

$$\dot{x}_2 = \frac{Vc}{\sqrt{1+c^2}}, x_2(0) = 0$$

解得

$$x_1(t) = \left( \frac{V}{\sqrt{1+c^2}} + W \right) t$$

$$x_2(t) = \frac{Vc}{\sqrt{1+c^2}} t$$

又由终端边界条件  $x_1(t_1) = x_1, x_2(t_1) = x_2$ , 可得

$$V^2 = \left( \frac{x_1}{t_1} - W \right)^2 + \left( \frac{x_2}{t_1} \right)^2$$

以及

$$c = \frac{x_2}{x_1 - Wt_1}$$

从而有

$$(V^2 - W^2)t_1^{*2} + 2x_1Wt_1^* - (x_1^2 + x_2^2) = 0$$

最优控制

$$u^* = \arctan c = \arctan \frac{x_2}{x_1 - Wt_1^*}$$

当  $W = V$  时

$$t_1^* = \frac{1}{2x_1W}(x_1^2 + x_2^2) \quad (\text{此时 } x_1 > 0)$$

当  $V > W$  时

$$t_1^* = \frac{1}{V^2 - W^2} \left[ -x_1W + \sqrt{x_1^2W^2 + (V^2 - W^2)(x_1^2 + x_2^2)} \right]$$

**【例 6-12】** 平面飞行火箭的最大射程控制。取平面坐标系为  $x_1Ox_2$ , 将飞行控制的分析仅限  $x_1x_2$  平面内。设  $x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1 = x_3, \dot{x}_2 = x_4$  分别为平面飞行火箭在  $x_1$  轴(水平轴)、 $x_2$  轴(垂直轴)方向的位移与速度分量;  $\alpha$  为飞行方向角(与  $x_1$  轴的夹角),  $\cos\alpha, \sin\alpha$  是两个控制变量;  $x_5(t)$  是火箭的瞬时质量;  $u(t) = -\frac{dx_5}{dt}$  为流量损失率(秒流量), 是第三个(正的)控制变量; 取  $c$  为有效排气速度(常数  $c > 0, u = F(t)/c$ , 其中,  $F(t)$  表示瞬时推力的大小);  $g$  为重力加速度(正常数), 设地心引力始终平行于  $x_2$  轴(垂直轴)。

模型为

$$\dot{x}_1 = x_3 \quad x_1(0) = x_{10}, \quad x_1(t_1) \text{ 自由}$$

$$\dot{x}_2 = x_4 \quad x_2(0) = x_{20}, \quad x_2(t_1) = x_2^1$$

$$\dot{x}_3 = \frac{cu}{x_5} \cos\alpha \quad x_3(0) = x_{30}, \quad x_3(t_1) \text{ 自由}$$

$$\dot{x}_4 = \frac{cu}{x_5} \sin\alpha - g \quad x_4(0) = x_{40} \quad x_4(t_1) \text{ 自由}$$

$$\dot{x}_5 = -u \quad x_5(0) = x_{50}, \quad x_5(t_1) = x_5^1$$

试确定当控制约束为  $0 \leq u \leq M$  时,使性能泛函  $J' = x_1(t_1)$  取最大的  $t_1^*, \alpha^*, u^*(t)$ 。

解 使  $J' = x_1(t_1)$  最大等价于使性能泛函

$$J = - \int_0^{t_1} \dot{x}_1 dt = - \int_0^{t_1} x_3(t) dt \quad (6-204)$$

为最小。

根据性能指标式(6-204)及系统状态方程首先构造问题的哈密顿函数

$$H = -x_3 + \lambda_1 x_3 + \lambda_2 x_4 + \lambda_3 \frac{cu}{x_5} \cos \alpha + \lambda_4 \frac{cu}{x_5} \sin \alpha - \lambda_4 g - \lambda_5 u \quad (6-205)$$

建立极值条件。由

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} = -\frac{\lambda_3 cu}{x_5} \sin \alpha + \frac{\lambda_4 cu}{x_5} \cos \alpha = 0$$

$$\text{得} \quad \tan \alpha = \frac{\lambda_4(t)}{\lambda_3(t)} \quad (6-206)$$

由  $u$  使  $H$  取全局最小的条件,得

$$u = \begin{cases} M, & \zeta(t) < 0 \\ 0, & \zeta(t) > 0 \end{cases} \quad (6-207)$$

$$\text{其中} \quad \zeta(t) = \frac{\lambda_3 c}{x_5} \cos \alpha + \frac{\lambda_4 c}{x_5} \sin \alpha - \lambda_5 \quad (6-208)$$

协态方程  $\left( \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right)$  展开式为

$$\dot{\lambda}_1 = 0$$

$$\dot{\lambda}_2 = 0$$

$$\dot{\lambda}_3 = 1 - \lambda_1$$

$$\dot{\lambda}_4 = -\lambda_2$$

$$\dot{\lambda}_5 = \frac{cu}{x_5^2} (\lambda_3 \cos \alpha + \lambda_4 \sin \alpha)$$

横截条件为

$$\lambda_1(t_1) = \lambda_3(t_1) = \lambda_4(t_1) = 0$$

$$\lambda_1(t) = 0$$

$$\text{则} \quad \lambda_2(t) \equiv \lambda_2(t_1)$$

$$\lambda_3(t) = t - t_1$$

$$\lambda_4(t) = \lambda_2(t_1)(t_1 - t)$$

由上式可得

$$\tan \alpha = \frac{\lambda_4}{\lambda_3} = -\lambda_2(t_1) \quad (6-209)$$

即方向角为常数,且

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda_2^2(t_1)}}, \sin \alpha = \frac{-\lambda_2(t_1)}{\sqrt{1 + \lambda_2^2(t_1)}} \quad (6-210)$$

代入式(6-208),得

$$\zeta(t) = \frac{c}{x_5} \sqrt{1 + \lambda_2^2(t_1)}(t - t_1) - \lambda_5 \quad (6-211)$$

$$\text{则} \quad \frac{d\zeta}{dt} = \frac{c}{x_5} \sqrt{1 + \lambda_2^2(t_1)} > 0, \quad t \in [0, t_1] \quad (6-212)$$

即  $\zeta(t)$  为单调递增的切换函数, 可见  $u(t)$  至多切换一次。而由飞行射程最大的物理意义, 必须切换一次, 设在  $\bar{t}$  时切换, 故

$$u^*(t) = \begin{cases} M, & 0 \leq t < \bar{t} \\ 0, & \bar{t} < t \leq t_1 \end{cases}$$

下面只须通过解状态方程(分段连续地)确定  $\bar{t}, t_1^*, \alpha^*$  即可。解  $\dot{x}_5 = -u^*(t)$  可得

$$x_5(t) = \begin{cases} x_{50} - Mt, & 0 \leq t < \bar{t} \\ x_5^1, & \bar{t} < t \leq t_1 \end{cases}$$

$$\text{由 } x_5 \text{ 在 } \bar{t} \text{ 处连续得} \quad x_{50} - M\bar{t} = x_5^1$$

$$\text{故} \quad \bar{t} = \frac{x_{50} - x_5^1}{M}$$

$$\text{由 } H|_{t_1} = -x_3(t_1) + \lambda_2(t_1)x_4(t_1) = 0, \text{ 得}$$

$$\tan \alpha = -\lambda_2(t_1) = -\frac{x_3(t_1)}{x_4(t_1)}$$

再积分  $x_3, x_4$  的状态方程可得

$$x_3(t_1) = x_{30} + c \ln \frac{x_{50}}{x_5^1} \cos \alpha$$

$$x_4(t_1) = x_{40} + c \ln \frac{x_{50}}{x_5^1} \sin \alpha - g t_1$$

最后由于  $x_{20}, x_2^1$  均已知, 再积分  $\dot{x}_2 = x_4$  又可得到含  $\alpha$  与  $t_1$  的一个方程。联立求解以上方程式, 可从中解得  $\alpha^*, t_1^*$ 。但不容易通过解析法求解, 一般需要通过数值计算才能求得最后解。

## 小 结

最优控制是现代控制理论的重要组成部分, 是系统设计的一种方法。它所研究的中心问题是如何选择控制信号以保证控制系统的性能在某种意义下最优。

本章首先通过实例介绍了最优控制问题的数学描述方法, 然后从工程的观点, 介绍解决最优问题的 3 种基本方法: 变分法、极小值原理和动态规划法。由于线性二次型问题的最优解具有统一的解析式, 且可导致一个简单的线性状态反馈控制律, 可以利用状态线性反馈构成闭环最优控制, 易于工程实现, 在实际工程中得到广泛应用, 因此, 线性二次型最优调节器的设计问题是本章的重点。在实际工程中, 常发生以时间为性能泛函的快速控制问题, 因此, 本章也对线性定常系统的最小时间控制问题进行了分析。由于 MATLAB 已成为当前国际控制领域广泛应用的工具软件, 本章介绍了 MATLAB 在线性二次型最优控制问题中的应用。本章最后选取了具有代表性的最优控制工程实例进行了求解。

## 思考题与习题 6

6-1 什么是最优控制? 简述最优控制的应用范围。

6-2 什么是系统的性能泛函? 试说明线性二次型性能泛函中各项的含义。

6-3 试论述线性系统状态调节器与输出调节器的共同点与相异处。

6-4 简述动态规划的核心思想。

6-5 试举例说明最小时间控制。

6-6 已知状态初值和终值为:  $t_0=1, x(t_0)=4, t_f>1$  但自由,  $x(t_f)=4$ , 试求使下列性能泛函达到极值的曲线  $x^*(t)$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left[ 2x(t) + \frac{1}{2} \dot{x}(t) \right] dt$$

6-7 设  $x=x(t), 0 \leq t \leq 1$ , 求从  $x(0)=0$  到  $x(1)=1$  间的最短曲线。

6-8 设控制系统的状态方程为

$$\dot{x}(t) = u(t), x(0) = x_0$$

终端时刻  $t_f$  自由, 终端约束  $x(t_f) = c_0$  (常数), 求  $x^*(t)$  和  $u^*(t)$ , 使下列性能泛函极小

$$J = \int_0^{t_f} (x^2 + \dot{x}^2) dt$$

6-9 设系统状态方程为

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t), x(0) = 10$$

性能泛函为

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 + u^2) dt$$

分下列两种情况: (1) 对  $u(t)$  无约束; (2) 对  $u(t)$  有约束  $|u(t)| \leq 0.3$ 。求最优控制  $u^*(t)$ , 使性能泛函极小。

6-10 设系统状态方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), x_1(0) = 2 \\ \dot{x}_2(t) = u(t), x_2(0) = 1 \end{cases}$$

性能泛函为

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} u^2(t) dt$$

要求达到  $x_1(t_f) = x_2(t_f) = 0$ , 试求: (1)  $t_f = 5$  时的最优控制  $u^*(t)$ ; (2)  $t_f$  自由时的最优控制  $u^*(t)$ 。

6-11 系统状态方程为

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 1$$

求最优控制  $u^*(t)$  及  $t_1^*$ , 使性能泛函  $J = \int_0^{t_1} \left( 1 + x + \frac{1}{2} u^2 \right) dt$  为最小。

6-12 设系统为

$$\dot{x} = -x + u, \quad x(0) = 1$$

控制约束为  $|u| \leq 1$ , 求  $u^*(t)$  使性能泛函  $J = \int_0^1 \left( x - \frac{1}{2} u \right) dt$  为极小。

6-13 设控制系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + u_2(t) \end{cases}$$

初始条件为:  $x_1(0)=0, x_2(0)=0$ , 性能泛函为

$$J = \int_0^1 (x_1 + u_1^2 + u_2^2) dt$$

要求终端状态为  $x_1(1)=x_2(1)=1$ , 试确定最优控制  $u^*(t)$ 、最优轨线  $x^*(t)$  及最优性能泛函  $J^*$ 。

6-14 设有图 6-14 所示的街道, 图中数字表示走完相应的一段街道所需的时间, 试求从 A 到 B 需时间最少的路径。

6-15 设一阶系统

$$\dot{x}(t) = u(t)$$

性能泛函为

$$J = \int_0^{t_f} [ax^2(t) + bu^2(t)] dt$$

式中,  $a$  和  $b$  为正常数, 试用连续系统动态规划确定最优控制  $u^*(t)$ 。

6-16 给定下列一阶离散系统

$$x(k+1) = x(k) + u(k), x(0) = 1$$

性能泛函为

$$J = \sum_{k=0}^3 [x^2(k) + u^2(k)]$$

试求最优控制序列  $u^*(k) (k=0, 1, 2, 3)$  和最小性能泛函  $J^*$ 。

6-17 给出下列二阶系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), x_1(0) = 1 \\ \dot{x}_2(t) = u(t), x_2(0) = 0 \end{cases}$$

终端时刻  $t_f$  为某一给定值, 试确定最优控制  $u^*(t)$ , 使下列性能泛函

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [x_1^2(t) + u^2(t)] dt$$

取极小值。

6-18 设系统状态方程  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$ , 初态为  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ , 求下列各问题的最优反馈控制

$\mathbf{u}^* = -\mathbf{Kx}$ , 使性能泛函  $J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\mathbf{x}^T \mathbf{Qx} + \mathbf{u}^T \mathbf{Ru}) dt$  取极值。

$$(1) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{R} = [1], \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{R} = [1], \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(3) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{R} = [1], \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(4) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{R} = [1], \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

6-19 设二阶系统如图 6-15 所示。试写出系统的能控标准型, 并求使性能泛函

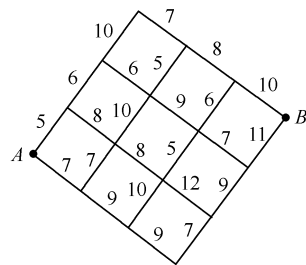


图 6-14 街道示意图



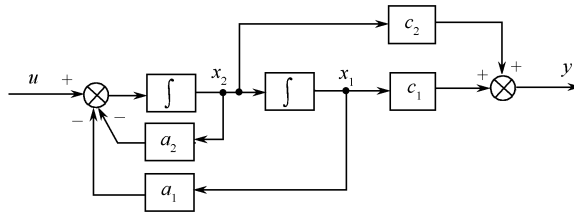


图 6-15 二阶系统结构图

$$J = \int_0^{\infty} [qy^2(t) + ru^2(t)]dt$$

为最小的最优控制  $u^*(t)$ , 其中,  $r$  和  $q$  为已知正常数,  $c_1^2 + a_1c_2^2 \neq a_2c_1c_2$ 。

6-20 设系统方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_2(t) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

性能泛函为

$$J = \int_0^{\infty} [(y(t) - 1)^2 + u^2(t)]dt$$

求使  $J$  取极小值的最优控制  $u^*(t)$ 。

6-21 设二阶系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \end{cases}$$

已知  $x_1(0) = x_2(0) = 1, x_1(t_f) = x_2(t_f) = 0$ , 控制约束  $|u(t)| \leq 1$ , 性能泛函

$$J = \int_0^{t_f} dt$$

试求最小时间控制  $u^*(t)$  和开关曲线。

6-22 已知系统的状态方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \end{cases}$$

控制约束  $|u(t)| \leq 1$ 。试确定最小时间控制, 使系统由任意初态最快地转移到终态

$$x_1(t_f) = 2, x_2(t_f) = 1$$

要求写出开关曲线方程并画出曲线形状。

## 上机实验题 6

6-1 已知系统状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -35 & -27 & -9 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

系统性能泛函为

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + u^T(t) \mathbf{R} u(t)] dt$$

其中

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{R} = [1]$$

试计算使  $J$  最小的最优状态反馈矩阵  $\mathbf{K}$ , 并对最优控制闭环系统进行单位阶跃响应的仿真。

6-2 已知系统状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

系统性能泛函为

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt$$

其中

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{R} = [1]$$

试用 MATLAB 确定使  $J$  最小的最优状态反馈矩阵  $\mathbf{K}$ , 并求最优控制闭环系统在下列初始条件下的响应

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

画出  $x_1$ 、 $x_2$ 、 $x_3$  和  $x_4$  对  $t$  的响应曲线。

6-3 设被控系统的状态空间表达式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -27 & -9 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

设计使系统阶跃响应具有良好动、静态特性的线性二次型最优控制律, 对闭环系统的阶跃响应进行仿真, 并分析二次型性能指标泛函中权矩阵的不同选取对系统动态性能的影响。

## 参考文献

- [1] 吴麒. 自动控制原理(上、下册). 北京:清华大学出版社,1992.
- [2] 刘豹. 现代控制理论. 2 版. 北京:机械工业出版社,2000.
- [3] 胡寿松. 自动控制原理. 3 版. 北京:国防工业出版社,1994.
- [4] 胡寿松. 自动控制原理. 4 版. 北京:科学出版社,2001.
- [5] 于长官. 现代控制理论. 2 版. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1997.
- [6] 谢克明. 现代控制理论基础. 北京:北京工业大学出版社,2001.
- [7] 韩曾晋. 现代控制理论和应用. 北京:北京出版社,1987.
- [8] Katsukiko Ogata 著,卢伯英等译. 现代控制工程. 3 版. 北京:电子工业出版社,2000.
- [9] 任和生. 现代控制理论及其应用. 北京:电子工业出版社,1992.
- [10] Franklin G. F 等著,朱齐丹等译. 动态系统的反馈控制. 北京:电子工业出版社,2004.
- [11] 绪方胜彦著,卢伯英等译. 现代控制工程. 北京:科学出版社,1976.
- [12] 罗传翼,程桂芬,付家才. 控制工程与信号处理. 北京:化学工业出版社,2004.
- [13] 全茂达. 线性系统理论和设计. 合肥:中国科学技术大学出版社,1998.
- [14] 陈树中,韩正之,胡启迪. 线性系统控制理论. 上海:华东师范大学出版社,2000.
- [15] 马植衡. 现代控制理论入门. 北京:国防工业出版社,1982.
- [16] 赵玫. 线性系统理论. 西安:西安交通大学出版社,1988.
- [17] 冯国楠. 最优控制理论与应用. 北京:北京工业大学出版社,1991.
- [18] 解学书. 最优控制——理论与应用. 北京:清华大学出版社,1986.
- [19] 曾葵醛. 李亚普诺夫直接法在自动控制中的应用. 上海:上海科学技术出版社,1985.
- [20] 韩京清,何关钰,许可康. 线性系统理论代数基础. 沈阳:辽宁科学技术出版社,1985.
- [21] 戴先中. 自动化科学与技术学科的内容、地位与体系. 北京:高等教育出版社,2003.
- [22] 常春馨. 现代控制理论基础. 北京:机械工业出版社,1988.
- [23] 孙德宝,王永骥,王金城. 自动控制原理. 北京:化学工业出版社,2002.
- [24] 何克忠,郝忠恕. 计算机控制系统分析与设计. 北京:清华大学出版社,1988.
- [25] 于渤. 现代控制理论. 北京:水利电力出版社,1995.
- [26] 胡寿松. 自动控制原理(下册). 北京:国防工业出版社,1984.
- [27] Chi\_Tsong Chen. Linear System Theory and Design. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1984.
- [28] 薛定宇. 反馈控制系统设计与分析——MATLAB 语言应用. 北京:清华大学出版社,2000.
- [29] 张晓华. 控制系统数字仿真与 CAD. 北京:机械工业出版社,1999.
- [30] 孙亮. MATLAB 语言与控制系统仿真. 北京:北京工业大学出版社,2001.
- [31] 楼顺天,于卫. 基于 MATLAB 的系统分析与设计——控制系统. 西安:西安电子科技大学出版社,1998.
- [32] 王朝珠,秦化淑. 最优控制理论. 北京:科学出版社,2003.
- [33] 郑大钟. 线性系统理论. 2 版. 北京:清华大学出版社,2002.
- [34] 尤昌德. 线性系统理论基础. 北京:电子工业出版社,1985.
- [35] 王恩平,秦化淑,王世林. 线性控制系统理论引论. 广州:广东科技出版社,1991.

- [36] 王时胜等. 自动控制理论. 南昌:江西科学技术出版社,2002.
- [37] Katsukiko Ogata 著,卢伯英等译. 现代控制工程. 4 版. 北京:电子工业出版社,2003.
- [38] 魏克新等. MATLAB 语言与自动控制系统设计. 北京:机械工业出版社,1997.
- [39] 施阳等. MATLAB 语言工具——TOOLBOX 实用指南. 西安:西北工业大学出版社,1998.
- [40] 刘坤. MATLAB 自动控制原理习题精解. 北京:国防工业出版社,2004.
- [41] 许世范,李春阳. 现代控制理论基础. 徐州:中国矿业大学出版社,1990.
- [42] 秦寿康,张正方. 最优控制. 北京:电子工业出版社,1990.
- [43] 吴沧浦. 最优控制理论与方法. 北京:国防工业出版社,2000.
- [44] 王积伟. 现代控制理论与工程. 北京:高等教育出版社,2003.
- [45] 黄忠霖. 控制系统 MATLAB 计算及仿真. 北京:国防工业出版社,2001.
- [46] 邢继祥,张春蕊等. 最优控制应用基础. 北京:科学出版社,2003.
- [47] 周春晖,厉玉鸣. 控制原理例题习题集. 北京:化学工业出版社,2001.
- [48] 王翼. 现代控制理论. 北京:机械工业出版社,2005.
- [49] 程鹏,王艳东. 现代控制理论基础. 北京:北京航空航天大学出版社,2004.
- [50] 叶庆凯,王肇明. 优化与最优控制中的计算方法. 北京:科学出版社,1986.
- [51] 李友善,梅晓榕,王彤. 自动控制原理 360 题. 2 版. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2002.
- [52] 王敏. 自动控制原理试题精选题解. 武汉:华中科技大学出版社,2002.
- [53] 卢京潮,刘慧英. 自动控制原理典型题解析及自测试题. 西安:西北工业大学出版社,2001.
- [54] 吕汉兴. 自动控制原理学习指导与题解. 武汉:华中科技大学出版社,2003.
- [55] 张志涌等. 精通 MATLAB5. 3 版. 北京:北京航空航天大学出版社,2000.
- [56] 邵士敏. 高等数学讲义(上册). 北京:中央广播电视大学出版社,1983.
- [57] 邵士敏,蒋定华. 高等数学讲义(下册). 北京:中央广播电视大学出版社,1984.
- [58] 郑大钟. 线性系统理论. 北京:清华大学出版社,1990.
- [59] (美)R. C. 多尔夫, R. H. 毕晓普著. 现代控制系统. 10 版. 北京:科学出版社,2005.
- [60] 常春馨. 现代控制理论概论. 北京:机械工业出版社,1982.
- [61] 刘豹. 现代控制理论. 北京:机械工业出版社,1983.
- [62] 王照林. 现代控制理论基础. 北京:国防工业出版社,1981.
- [63] 黄琳. 稳定性与鲁棒性的理论基础. 北京:科学出版社,2003.
- [64] 魏克新等. MATLAB 语言与自动控制系统设计. 2 版. 北京:机械工业出版社,2004.
- [65] 胡寿松等. 自动控制原理习题集. 北京:国防工业出版社,1990.
- [66] 李斌,何济民. 现代控制理论. 重庆:重庆大学出版社,2003.
- [67] 赵明旺等. 现代控制理论. 武汉:华中科技大学出版社,2007.
- [68] 张嗣瀛,高立群. 现代控制理论. 北京:清华大学出版社,2006.
- [69] 史忠科. 线性系统理论. 北京:科学出版社,2008.
- [70] 易继锴,江祥贤,侯媛彬,杨玉珍. 电气传动自动控制原理与设计. 北京:北京工业大学出版社,1997.
- [71] 梁慧冰,孙炳达. 现代控制理论基础. 北京:机械工业出版社,2006.
- [72] 陈伯时. 电力拖动自动控制系统——运动控制系统. 3 版. 北京:机械工业出版社,2003.



欢迎登录 **免费** 获取本书教学资源  
<http://www.hxedu.com.cn>

# 现代控制理论 (第2版)

本书从工程应用角度出发,以线性系统理论和最优控制为主线,介绍现代控制理论的基本方法。其中,线性系统理论部分主要阐述状态空间分析法和综合法的基本内容,包括动态系统的状态空间描述、动态系统的定量分析(状态方程的解)和定性分析(能控性、能观测性、李亚普诺夫稳定性)、动态系统的综合(状态反馈与状态观测器设计);最优控制部分在介绍解决最优问题3种基本方法(变分法、极小值原理、动态规划法)的基础上,阐述两类典型最优反馈系统的设计(线性二次型最优控制、最小时间控制)。本书在保证理论知识体系结构完整的前提下,融入MATLAB在线性系统理论和最优控制中的应用。

本书注重状态空间控制理论的物理概念和工程背景,阐述方式上力求符合理工科学生的认识规律。本书可作为高等院校自动化、电气工程及其自动化等专业本科生的教材,也可供相关专业的研究生及相关领域的工程技术人员学习参考。



策划编辑:凌 毅

责任编辑:凌 毅

封面设计:一克米工作室

ISBN 978-7-121-19449-8



定价: 36.00元